

# Dinámica de un modelo de población bajo efecto Allee e inmigración denso-dependiente para la especie *Hippocamelus bisulcus*

Tesis  
entregada a la  
Universidad Tecnológica Metropolitana  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de

*Magister en Biomatemática*

Facultad de Ciencias Naturales, Matemática y del Medio Ambiente

Por Aaron Aquiles Guajardo Álvarez

Enero, 2024

Director de Tesis Dr. Gustavo Ossandón Araya

Co-director de Tesis Dr. Daniel Sepúlveda Oehninger

# Facultad de Ciencias Naturales, Matemática y del Medio Ambiente Universidad Tecnológica Metropolitana

## Informe de Aprobación Tesis de Magister

Se informa a la *Escuela de Postgrado* de la *Facultad de Ciencias Naturales, Matemática y del Medio Ambiente* que la Tesis de Magister presentada por el candidato

Aaron Aquiles Guajardo Álvarez

Ha sido aprobada por la comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de *Magister en Biomatemática*, en el examen de Defensa Privada de Tesis rendido el día X del mes de XXXX.

Director de Tesis

Dr. Gustavo Ossandón Araya

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

*“Prolongue una línea recta al infinito: ¿Qué encontrará al final?”*  
– J. L. Martínez, *La Nueva Novela*, 1977.

## Agradecimientos

En primer lugar, quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a mi director de tesis Doctor Gustavo Ossandon A. por toda su experiencia, comprensión, apoyo y paciencia los cuáles contribuyeron al desarrollo de este complejo pero gratificante camino de la investigación científica. Su constante orientación y la fe inquebrantable que ha depositado en mis habilidades, han sido fuentes inagotables de motivación, impulsándome a alcanzar alturas que jamás habría imaginado.

Además, agradezco a mi co-director de tesis Doctor Daniel Sepulveda O. por su incondicional apoyo y paciencia en el desarrollo de esta investigación.

Finalmente, quiero expresar mi sincero agradecimiento a la doctora Cecilia Donoso C. por sus valiosos consejos y la constante motivación que me brindó durante el desarrollo de mis asignaturas de postgrado.

Mi más profundo agradecimiento por todo lo que ustedes me entregaron día a día.

Aaron Guajardo Álvarez



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	4
1.1.1. Huemul . . . . .	4
1.1.2. Efecto Allee . . . . .	6
1.1.3. Migración . . . . .	9
1.1.4. Modelos de población . . . . .	10
1.1.5. Planteamiento del Problema . . . . .	12
1.2. Objetivos . . . . .	12
<b>2. Marco teórico</b>	<b>13</b>
2.1. Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y Estabilidad. . .	13
2.2. Sistemas lineales. . . . .	15
2.2.1. Sistemas lineales. . . . .	15
2.2.2. Puntos de equilibrio de sistemas lineales. . . . .	17
2.2.3. Valores y vectores propios. . . . .	18
2.2.4. Puntos de equilibrio estables e inestables, clasificación . . . . .	20
2.2.5. Traza y determinante. . . . .	21
2.3. Sistemas no lineales y Principio de estabilidad linealizada. . . . .	23
2.3.1. Linealización. . . . .	23
<b>3. Metodología</b>	<b>27</b>
3.1. Metodología de modelamiento matemático . . . . .	29
3.2. Metodología de aplicación de las teorías matemáticas . . . . .	30
3.3. Metodología de aplicación de metodos numéricos . . . . .	30
3.4. Discusión Metodológica . . . . .	30
<b>4. Resultados</b>	<b>33</b>
4.1. Formulación del modelo . . . . .	33
4.2. Equilibrios del modelo . . . . .	34
4.3. Análisis de estabilidad local de los equilibrios . . . . .	35
4.4. Campo de Direcciones . . . . .	44

4.5. Simulaciones numéricas . . . . .	47
<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>

# Índice de figuras

1.1. Nicho ecológico ([20] ) . . . . .	5
1.2. Derivada $(dx/dt)$ v/s Densidad de la población $(x)$ , la gráfica queda representada por la ecuación $\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{m} - 1\right)$ , siendo $m$ el umbral Allee y $K$ la capacidad de carga. . . . .	8
2.1. Plano $D$ v/s $T$ , la región sombreada corresponde a $T^2 - 4D > 0$ . . . . .	22
3.1. Diagrama de la metodología de estudio . . . . .	28
4.1. Gráfica de la función $f(u) = u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 4u + 1$ . . . . .	38
4.2. Gráfica de la función $f(u) = 2u^3 - 4u^2 + 4u - 1$ . . . . .	40
4.3. Gráfica de la función $g(u) = u^4 - 3u^3 + 4u^2 - 3u + 1$ . . . . .	41
4.4. Gráfica de la función $f(u) = 4u^6 - 12u^5 + 20u^4 - 20u^3 + 12u^2 - 4u + 1$ . . . . .	42
4.5. Gráfica de la función $f(u) = -u^4 + 3u^3 - 4u^2 + 3u - 1$ . . . . .	43
4.6. Punto de equilibrio $(K, m)^T$ . . . . .	44
4.7. Punto de equilibrio $(K, 0)^T$ . . . . .	45
4.8. Punto de equilibrio $(m, 0)^T$ . . . . .	45
4.9. Punto de equilibrio $(m - \frac{m^2}{K}, \frac{m^2}{K} - \frac{m^3}{K^2})^T$ . . . . .	46
4.10. Población v/s Tiempo . . . . .	47
4.11. Población v/s Tiempo . . . . .	47





# Índice de cuadros

2.1. Estabilidad e inestabilidad de los sistemas lineales y casi lineales [5]	25
4.1. Parámetros simulación modelo	44
4.2. Parámetros simulación modelo	45
4.3. Parámetros simulación modelo	45
4.4. Parámetros simulación modelo	46



## Resumen

El Huemul del sur, junto con el Huemul del norte y el Pudú, es uno de los tres ciervos nativos de Chile. Debido a su escasez y su naturaleza esquiva, se ha convertido en un emblema animal en nuestro país. Este ciervo es endémico de la región andino-patagónica de Chile y Argentina. En la actualidad, se encuentra catalogado como en peligro de extinción por la Unión Internacional para la Conservación de la Naturaleza, siendo uno de los cérvidos neotropicales más amenazados. La notable reducción de esta especie ha alcanzando niveles críticos que lo sitúan por debajo del umbral de Allee. El objetivo de este trabajo es analizar la dinámica de un modelo matemático para la conservación de la especie Huemul que se encuentra bajo efecto Allee y considera migración. Para estudiar éste fenómeno ecológico, se emplea un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal el cual modele la dinámica poblacional, realizando un análisis cualitativo del mismo, determinando los puntos de equilibrio, para luego proceder a realizar la linealización correspondiente. Esta caracterización de los puntos de equilibrio nos permitirá analizar la estabilidad de los mismos y, a su vez, construir el diagrama de fase correspondiente.

## Abstract

The Southern Huemul, along with the Northern Huemul and the Pudú, is one of the three native deer species in Chile. Due to its scarcity and elusive nature, it has become an animal emblem in our country. This deer is endemic to the Andean-Patagonian region of Chile and Argentina. Currently, it is classified as endangered by the International Union for Conservation of Nature, being one of the most threatened neotropical deer species. The significant reduction of this species has reached critical levels, placing it below the Allee threshold. The objective of this work is to analyze the dynamics of a mathematical model for the conservation of the Huemul species, which is under the Allee effect and considers migration. To study this ecological phenomenon, a system of nonlinear differential equations is used to model the population dynamics, conducting a qualitative analysis of it, determining the equilibrium points, and then proceeding with the corresponding linearization. This characterization of the equilibrium points will allow us to analyze their stability and, in turn, construct the corresponding phase diagram.



# Capítulo 1

## Introducción

La Ecología Matemática es de vital importancia debido a su enfoque en el estudio de los organismos vivos y su relación con el entorno. Este estudio abarca diversos niveles de organización de la materia viva, desde las moléculas y células hasta los ecosistemas y la biosfera en su conjunto. A diferencia de otras ramas de la biología, la ecología requiere una perspectiva multidisciplinaria que emplea herramientas provenientes de disciplinas como la Física, Química y Matemática. En particular, los trabajos de investigación en ecología se distinguen por su mayor utilización de herramientas matemáticas, como la estadística y los modelos matemáticos. Estas herramientas permiten analizar y comprender los complejos sistemas ecológicos de manera más precisa y rigurosa.

Así, la ecología matemática desempeña un papel fundamental en el avance de nuestro conocimiento sobre la interacción entre los organismos y su entorno. Al emplear herramientas matemáticas, los investigadores pueden obtener resultados más cuantitativos y realizar predicciones más precisas, lo que contribuye a la toma de decisiones informadas en la gestión y conservación de los ecosistemas.

Para establecer una relación entre ecología y matemática en la aplicación de modelos matemáticos, se abordan diversas temáticas, como el comportamiento y la dinámica de las poblaciones, el estudio y análisis de las epidemias, entre otros casos relevantes. Para comprender estos comportamientos, se utilizan técnicas y software computacionales que permiten resolver y modelar una población específica. En este sentido, la disciplina encargada de comprender las fluctuaciones de una población de especies, ya sea en términos de crecimiento, disminución e incluso extinción, se conoce como dinámica de poblaciones.

Los cambios en la dinámica de una especie pueden ser causados por diversas razones, tanto endógenas (autodestrucción de la propia especie) como exógenas (como actividades humanas, terremotos, aluviones, erupciones volcánicas, entre otros). Es fundamental destacar que las bajas densidades de población en conjunto con condiciones ecológicas críticas pueden conducir a un crecimiento poblacional reducido, e incluso a la extinción de la especie.

## 1.1. Antecedentes

### 1.1.1. Huemul

El Huemul del sur (*Hippocamelus bisulcus*) es uno de los tres ciervos nativos presentes en Chile, junto con el huemul del norte o taruka (*Hippocamelus antisensis*) y el pudú (*Pudu puda*). Debido a su escasa abundancia natural y su comportamiento esquivo, se ha convertido, junto con el cóndor (*Vultur gryphus*), en un emblema animal. Es reconocido por los pueblos originarios de la zona sur de Chile con distintos nombres. Por ejemplo, los Aonikenk o Tehuelches, habitantes de la estepa patagónica, lo llamaban shoan, shoam, soonom, soonem, shonam, shonen, sunam o trula. Mientras que los pehuenches de las regiones del Biobío y de la Araucanía lo conocían como shenam, cisnal o cisnam [20].

Este ciervo es endémico de la región andino-patagónica de Chile y Argentina [22], en Sudamérica. En la actualidad, se encuentra entre los cérvidos neotropicales más amenazados y está catalogado como en peligro crítico de extinción por la Unión Internacional para la Conservación de la Naturaleza (UICN). Ha experimentado una marcada reducción tanto en términos de número de individuos como en su distribución original [20].

El Huemul del sur posee una apariencia robusta, con extremidades fuertes y relativamente cortas, lo que indica su adaptación a los entornos montañosos. Los machos son más grandes y pesados que las hembras, oscilando entre los 55 y 90 kg, en comparación con los 60 a 80 kg de las hembras. Su pelaje, el cual se renueva dos veces al año en otoño y primavera, es pardo, espeso, voluminoso (de 3 a 7 cm de longitud) y ligeramente oleoso, lo que le permite nadar con facilidad en las frías aguas de lagos, ríos y arroyos, además de proporcionarle un excelente abrigo contra las bajas temperaturas y los fuertes vientos. Durante el invierno, el pelaje se vuelve más largo y oscuro, y hacia la primavera empieza a cambiar a un pelo más corto y claro. El tamaño de las cornamentas varía entre las diferentes poblaciones, siendo más pequeñas en aquellas que habitan en áreas costeras, posiblemente debido a la limitada disponibilidad de minerales y nutrientes en los valles glaciares [20].

Existen únicamente dos casos documentados de estimación de edad en vida silvestre, debido al reducido número de animales marcados y monitoreados a lo largo del tiempo. El primero de ellos se registró en el actual Parque Nacional Patagonia (anteriormente Reserva Nacional Tamango), donde se marcó un huemul hace 10 años, estimando su edad en 4 años en el momento de su captura. El segundo caso ocurrió en el Parque Nacional Torres del Paine, donde se marcaron 16 cervatillos entre los años 2002 y 2008. De estos, se obtuvo información de uno de los primeros individuos marcados, que sobrevivió hasta el año 2016, alcanzando los 13 años al finalizar el estudio [11].

Inicialmente, el Huemul del sur habitaba tanto territorio chileno como argentino, desde el río Cachapoal (34° L. S., Región de O'Higgins) hasta el Estrecho de Magallanes (54° L. S.). Sin embargo, en la actualidad ha experimentado una notable disminución, habiendo retrocedido un 35 % de su territorio original y su población ha sufrido una disminución del 39 %. En Chile, el Huemul se encuentra presente en las regiones del Biobío, Ñuble, Los Ríos, Los Lagos, Aysén y Magallanes, siendo estas últimas donde se concentra el mayor número de individuos y la

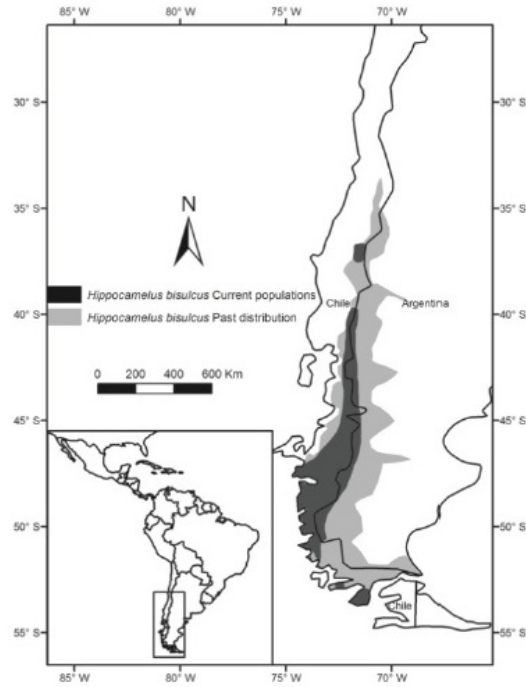


Figura 1.1: Nicho ecológico ([20] )

superficie de hábitat que se encuentra en áreas silvestres protegidas (ASP).

En la actualidad, el Huemul del sur se encuentra en un peligro inminente de extinción debido a diversos factores. Su reducido tamaño poblacional y la alta fragmentación de sus grupos reproductivos son preocupantes, ya que estos se encuentran distanciados geográficamente entre sí. Además, se encuentra aislado geográficamente a más de 400 km de la población más numerosa y estable del sur de Argentina y Chile.

Las causas de este proceso de extinción están asociadas a diferentes factores. Históricamente, la especie ha sido objeto de caza, lo que ha afectado su supervivencia en todo su rango de distribución. Además, las enfermedades transmitidas por la ganadería extensiva han tenido un impacto negativo en su salud. Por último, la reducción y destrucción del hábitat debido a diversas actividades humanas también ha contribuido a su situación crítica [20].

En la década de 1980, se estimaba que la población de huemules oscilaba entre 1.000 y 2.000 individuos. Sin embargo, en los años 90, se estimó un número mínimo de 781 individuos. En el año 2006, se realizaron dos nuevas estimaciones poblacionales. Una de ellas recopiló información más detallada y realizó un esfuerzo de muestreo desde 1992 hasta 2002, mientras que la otra se centró únicamente en Argentina. Estas estimaciones se complementan y los resultados indican la presencia de un total de 101 subpoblaciones en una superficie de 1.964.394 hectáreas en los Andes Patagónicos [24] . Aproximadamente el 52 % de esta distribución



espacial se encuentra en Chile (con una población estimada entre 1.000 y 1.500 individuos) y el 48 % en Argentina (con una población estimada entre 350 y 600 individuos).

En cuanto al tamaño poblacional, se estima que cerca de 2.000 individuos conforman la población total. De este número, aproximadamente el 34.4 % se encuentra dentro de áreas protegidas, que cubren el 47 % de la superficie de distribución en 31 unidades de protección, como parques, monumentos o reservas, en ambos países. Por otro lado, el 74 % de la población se encuentra en pequeños fragmentos de hábitat que varían entre 6.400 y 12.800 hectáreas.

Debido al reducido tamaño de la población actual, con menos de 2.000 individuos y una drástica disminución del 99 % en relación a las abundancias históricas estimadas, así como las tendencias negativas de la población y los riesgos derivados de una creciente fragmentación, la especie ha sido clasificada como en peligro de extinción (EN) en la Lista Roja de la Unión Internacional para la Conservación de la Naturaleza (IUCN).

En la región de Aysén, se ha observado que la población general de huemules se mantiene estable en respuesta al aumento del ganado y la construcción de centrales hidroeléctricas a gran escala en el paisaje, pero solo hasta cierto punto. Sin embargo, se ha identificado que las poblaciones con menos de 100 individuos tienden a disminuir en estas circunstancias. Para toda la región, se considera que existe potencial de recuperación de la población de huemules, siempre y cuando se gestionen adecuadamente los factores limitantes. Es fundamental llevar a cabo estudios exhaustivos para estimar el tamaño y la distribución de la población en su totalidad, así como recopilar datos sobre la supervivencia de los individuos. Estos estudios contribuirán a mejorar los planes de conservación para esta especie en peligro de extinción [20].

Se resalta la importancia de adoptar estrategias de gestión que promuevan y preserven la variabilidad genética, a la vez que limiten la endogamia futura. Para lograrlo, es fundamental conservar y establecer corredores de hábitat que faciliten el flujo genético, así como expandir las áreas protegidas con el fin de aumentar el tamaño efectivo de la población. Estas medidas contribuirán a mantener la diversidad genética y a salvaguardar el futuro de la especie [20].

Las poblaciones de Huemul se caracterizan por presentar una baja densidad. Se han llevado a cabo estimaciones de densidad poblacional utilizando diferentes métodos, como transectas y cámaras trampa, y se ha observado que las densidades varían en un rango de 0,35 a 6,9 huemules por kilómetro cuadrado.

### **1.1.2. Efecto Allee**

El ecologista Warder Clyde Allee (1885-1955) hacia el año 1920 estudió las especies desde una perspectiva ecológica desarrollando su investigación hacia el comportamiento grupal de animales. Dicha investigación fue presentada en [2].

El fenómeno conocido como efecto Allee, nombrado en honor a W.C. Allee, se manifiesta en poblaciones locales de especies cuando, en determinadas condiciones naturales, la tasa de crecimiento per cápita disminuye a niveles críticos. Si esta situación persiste a lo largo del tiempo, existe un alto riesgo de extinción para la especie.

Un desafío recurrente en la conservación de especies en peligro de extinción es que la simple prohibición de la caza no garantiza la recuperación de la población. Esto se debe a que, cuando la densidad poblacional alcanza niveles críticos, la reproducción y el mantenimiento se vuelven extremadamente difíciles, lo que provoca una disminución en la tasa de reproducción hasta niveles negativos y, en última instancia, conduce a la extinción de la especie [19].

P. A. Stephens et al. [23], definen el efecto Allee como “una relación positiva entre un componente de la adaptación (fitness) individual y el número o densidad de conespecíficos” (dos o más individuos, poblaciones son conespecíficos si pertenecen a la misma especie). Lo anterior se puede interpretar como: la adaptación de un individuo en una población pequeña decrece a medida que el tamaño de la población también disminuye [1].

La adaptación individual, en su sentido más amplio, se refiere a la contribución genética que un individuo realiza a las generaciones futuras. Los componentes fundamentales de la adaptación son la supervivencia y la reproducción, de los cuales se derivan otros aspectos como el desarrollo, la edad de la primera reproducción, el éxito en el apareamiento, la fecundidad y las probabilidades de muerte o reproducción, entre otros [1].

En general, las poblaciones pueden experimentar un fenómeno conocido como efecto Allee, el cual puede originarse a través de diversos mecanismos biológicos. En el caso de un componente de efecto Allee, puede surgir debido a cualquier mecanismo que genere una dependencia positiva de la densidad en algún aspecto adaptativo. El efecto Allee se puede clasificar en 2 grupos:

1. Efecto Allee demográfico, se refiere a una relación positiva entre la tasa de crecimiento per cápita de una población y su tamaño o densidad. Desde el punto de vista ecológico podemos subdividir este efecto en:
  - a) Efecto Allee débil es aquel en que la tasa de crecimiento de la población per cápita es positiva para densidades de población pequeñas, donde un incremento en esta densidad produce un incremento en la tasa; y para densidades altas un incremento en la densidad produce un decrecimiento en dicha tasa.
  - b) El efecto Allee fuerte se refiere a una situación en la cual, si la densidad poblacional cae por debajo de un valor crítico conocido como umbral de Allee, la tasa de crecimiento per cápita se vuelve negativa. En presencia de un efecto Allee fuerte, una población experimentará un rápido declive hasta su extinción.[1].
2. Efecto Allee componente, relacionado con la adaptación individual de una especie, se refiere a la relación entre la fecundidad o la supervivencia de una especie y la densidad poblacional. Este tipo de efecto no siempre genera un Allee demográfico.

Uno de los principales mecanismos propuestos para explicar una mayor supervivencia en grupos con altas densidades es la protección proporcionada por las agregaciones de animales frente a amenazas externas [1].

Se han descrito numerosos ejemplos del efecto Allee en relación con bajas densidades poblacionales. Sin embargo, este efecto también puede influir en un amplio rango de densidades.

Las poblaciones pueden manifestar el efecto Allee debido a diversos fenómenos [3] , [7], entre los cuales se incluyen :

1. En poblaciones con baja densidad o tamaño, puede resultar más difícil encontrar parejas compatibles y receptivas.
2. La reproducción puede facilitarse cuando los individuos tienen la percepción de otros con los que reproducirse. En poblaciones pequeñas, existe una menor probabilidad de que esta situación ocurra, ya que los individuos tienen menos oportunidades de encontrar compañeros reproductivos.
3. En poblaciones pequeñas, los grupos de presas pueden mostrar un comportamiento antidepredador cooperativo menos eficiente o menos vigilante.
4. A bajas densidades de población, el agrupamiento colectivo se vuelve menos eficaz, lo que afecta la termorregulación social y la resistencia a bajas temperaturas, disminuyendo su eficiencia.
5. En poblaciones pequeñas, se observa un incremento en la endogamia, es decir, en la tasa de autofecundación y/o el número de apareamientos entre individuos emparentados cercanos.

El efecto Allee queda representado en la figura (1.2) :

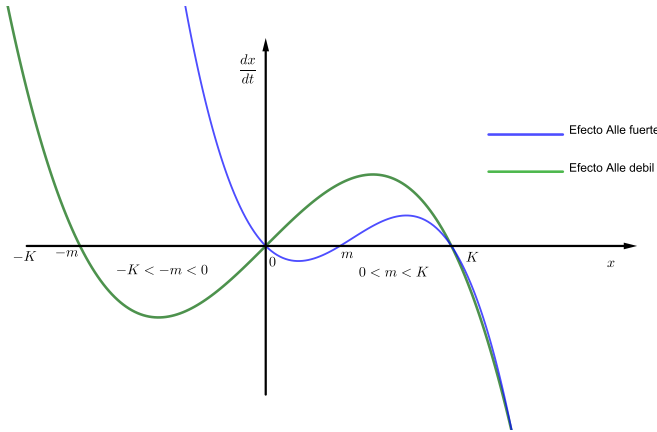


Figura 1.2: Derivada  $(dx/dt)$  v/s Densidad de la población  $(x)$ , la gráfica queda representada por la ecuación  $\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{m} - 1\right)$ , siendo  $m$  el umbral Allee y  $K$  la capacidad de carga.

### 1.1.3. Migración

La naturaleza sigue una dinámica sencilla en su funcionamiento, aunque puede resultar difícil de comprender para los seres humanos. Es simple porque establece un equilibrio dinámico en el que cada componente cumple su función y forma un sistema orgánico perfecto que permite el desarrollo de la vida en todas sus manifestaciones. Dentro de este macrosistema, todas las partes están interrelacionadas, y si algún elemento desaparece, la naturaleza se encarga de reemplazarlo.

A través de disciplinas como la genética y la ecología, entre otras, hemos ido adquiriendo un mayor entendimiento de los diferentes mecanismos y relaciones que existen entre los seres vivos y su entorno, para mantener un orden que garantice la supervivencia de todas las especies. La depredación, la competencia, el mutualismo y el parasitismo son ejemplos de estas relaciones, que contribuyen al equilibrio de los ecosistemas y crean un espacio vital para cada especie. Todos los grupos tienen la necesidad de encontrar un lugar para habitar, reproducirse y alimentarse. Algunos son capaces de generar su propio alimento, mientras que otros dependen de fuentes externas [15].

Esta capacidad de obtener alimento y encontrar un lugar adecuado probablemente sea el secreto del éxito para la supervivencia. Cada especie se adapta a características físicas, químicas y biológicas específicas, y está limitada por ellas. Algunos grupos han logrado encontrar regiones que les proporcionan alimento durante todo el año, tanto para ellos como para sus crías. Sin embargo, otros no han encontrado tales beneficios y necesitan desplazarse a otros lugares. Si este desplazamiento es unidireccional, se llama emigración, mientras que si es de ida y vuelta, se conoce como migración [16].

La migración y la emigración son componentes importantes del proceso de dispersión, que desempeña un papel crucial en la regulación del tamaño de las poblaciones. Estos fenómenos contribuyen a garantizar la supervivencia de las especies más adaptadas, mientras que los individuos más débiles tienden a ser desplazados o se convierten en presa fácil para los depredadores. Por lo tanto, aquellos individuos que exceden esta capacidad se ven en la necesidad de buscar alternativas o enfrentar la posibilidad de sufrir consecuencias negativas, como la escasez de alimentos y el aumento de la competencia por el espacio vital. La supervivencia de una especie depende de su capacidad para adaptarse a estas limitaciones y encontrar soluciones viables para su subsistencia [10].

La emigración puede ocurrir debido a tres causas fundamentales: la competencia intra e interespecífica y la destrucción o transformación de hábitats. En el primer caso, los individuos o poblaciones que no logran asegurarse un territorio adecuado para su sustento tienden a emigrar. Además, puede darse la emigración de poblaciones enteras que son desplazadas por nuevos competidores, a menudo introducidos por actividades humanas, que tienen una mejor adaptación al nuevo entorno. Por otro lado, la destrucción y reducción del hábitat de diferentes especies, también causada por el ser humano, puede ser otra razón para la emigración. En su lucha por la supervivencia, las especies buscarán nuevos territorios, lo que a su vez puede desencadenar un efecto dominó, obligando a otras especies a desplazarse.[15].

En el proceso emigratorio, ciertas poblaciones de una especie se ven obligadas a desplace-

se hacia diferentes lugares en busca de condiciones favorables para su supervivencia. Si las condiciones en el nuevo entorno son lo suficientemente distintas como para requerir adaptaciones y se produce una separación espacial y temporal de los demás individuos de la misma especie, puede originarse una nueva especie. La dispersión desempeña un papel crucial en la consolidación y madurez de los ecosistemas, al permitir que todos los nichos ecológicos sean ocupados y se establezca un equilibrio dinámico de interrelaciones entre todas las formas de vida [15].

Una tercera causa del fenómeno migratorio se origina principalmente por la búsqueda de áreas propicias para el apareamiento y la reproducción, donde exista suficiente alimento para mantener tanto a la población actual como a los nuevos individuos del grupo. Este proceso se activa en respuesta a cambios en las condiciones físicas, químicas y biológicas del entorno, así como a cambios en la fisiología del animal, que a menudo son consecuencia de dichos cambios externos.

En resumen, la migración se debe a la necesidad de encontrar lugares adecuados para reproducirse, obtener suficiente alimento y asegurar condiciones favorables para el desarrollo de los nuevos individuos [15].

Una vez que la población se encuentra en movimiento, su búsqueda llegará a su fin cuando encuentren uno o varios lugares que les proporcionen las condiciones necesarias para garantizar su supervivencia.

Un modelo de flujo migratorio comúnmente se utiliza para analizar el crecimiento o la disminución de la población en distintas áreas geográficas estudiadas. Dependiendo del tipo de agentes o individuos migrantes involucrados, se pueden establecer las siguientes categorías: Migración humana, Migración de especies animales, Propagación de enfermedades y Migración de otros organismos [18].

#### **1.1.4. Modelos de población**

Desde los inicios de la ecología como disciplina científica, e incluso antes, los modelos matemáticos han sido parte fundamental de sus fundamentos. Estos modelos han permitido comprender y estudiar diversos procesos ecológicos.

Algunos ejemplos destacados incluyen los modelos de crecimiento poblacional propuestos por Malthus en 1798 y Verhulst en 1838, 1845 y 1847, los modelos de competencia y depredación desarrollados por Lotka en 1925 y Volterra en 1926, los trabajos de Gause en 1934 que combinaron la experimentación y los modelos matemáticos en el estudio de la competencia. Los estudios realizados por Robert MacArthur entre 1950 y 1975 y los trabajos de Hutchinson, especialmente a partir de 1957, que contribuyeron al desarrollo de la moderna teoría del nicho ecológico. Estos ejemplos demuestran cómo los modelos matemáticos han sido una herramienta valiosa en la ecología para comprender los patrones y procesos que ocurren en los ecosistemas [17].

Los modelos matemáticos desempeñan un papel de gran importancia en ecología, especialmente en la representación de las variaciones de densidad de las poblaciones. Estos modelos

tienen como objetivo expresar, a través de ecuaciones, cómo la densidad poblacional cambia a lo largo del tiempo.

Estas herramientas proporcionan una valiosa ayuda para comprender y predecir los cambios en la densidad poblacional y su impacto en los ecosistemas. Gracias a ellos, podemos obtener una visión más clara de la dinámica de las poblaciones y tomar decisiones informadas en la gestión y conservación de los recursos naturales [17]. Un ejemplo de ello es el modelo clásico de crecimiento exponencial o modelo de Malthus, el cual es el más básico entre los modelos continuos de crecimiento poblacional. Este modelo establece que la tasa de crecimiento de la población es proporcional a su densidad, y está dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= rx \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

dónde:

$$\begin{aligned} x &: \text{población} \\ b &: \text{tasa de natalidad per cápita} \\ d &: \text{tasa de mortalidad per cápita} \\ r &: \text{tasa de crecimiento per cápita} \\ r &= b - d \end{aligned}$$

Un modelo más realista considera que la población no puede crecer indefinidamente y de forma cada vez más rápida, como lo representa el modelo exponencial. En realidad, existe un límite al crecimiento poblacional y, al desarrollar un modelo matemático, este límite debe reflejarse en una función que dependa de la densidad poblacional. La tasa de crecimiento ya no será constante, sino que variará en función de la densidad poblacional, este es el caso del modelo logístico de crecimiento o modelo de Verhulst en el cual, la tasa de crecimiento se contempla como una función lineal decreciente de la densidad poblacional. El modelo de crecimiento (logístico) poblacional de Verhulst queda representado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

dónde:

$$\begin{aligned} x &: \text{población} \\ K &: \text{capacidad de carga ambiental} \\ r &: \text{tasa de crecimiento per cápita} \end{aligned}$$

Un modelo matemático de crecimiento poblacional debe cumplir con ciertas restricciones inherentes al fenómeno biológico que representa. Por ejemplo, si la población es nula, el crecimiento

debe ser nulo también. Además, es necesario evitar la aparición de poblaciones negativas, que pueden tener sentido desde el punto de vista de la ecuación, pero no en el mundo real. Esta última restricción se puede solucionar mediante la aplicación de condiciones de contorno adecuadas o la elección de funciones apropiadas.

### **1.1.5. Planteamiento del Problema**

En escenarios donde la densidad poblacional se encuentra en niveles críticamente bajos y pone en peligro la supervivencia de una especie, se hace necesario intervenir para fomentar la recuperación de los niveles de población y asegurar su supervivencia. Una estrategia razonable en estas situaciones es la introducción de nuevos individuos en el hábitat de la especie. En este contexto, una estrategia natural consiste en generar un flujo migratorio que dependa del nivel poblacional de la especie.

Como vimos anteriormente, el Huemul es una especie que encuentra en peligro de extinción que habita en la región andino patagónica de Chile y Argentina, los niveles de población han bajado notablemente durante los últimos años. En este sentido, la investigación se enfocará en el estudio matemático de cómo los nuevos individuos se integran en el hábitat de una especie mediante el flujo migratorio, el cual está influenciado por el tamaño de la población de la especie.

En la literatura actual, no se han encontrado modelos que integren ecuaciones diferenciales con el efecto Allee y la migración para la especie Huemul. Dado que esta especie se encuentra en peligro de extinción, es de vital importancia contar con herramientas que permitan simular diferentes escenarios y evaluar el impacto y la respuesta de la especie frente a diversas perturbaciones. En este contexto, surge la pregunta sobre la posibilidad de desarrollar un modelo que se enfoque en la dinámica poblacional del Huemul considerando el efecto Allee, migración y parches, lo que permitiría obtener una comprensión más completa de su dinámica y su interacción con el medio ambiente.

## **1.2. Objetivos**

### **Objetivo General**

Analizar la dinámica de un modelo matemático para la conservación de la especie Huemul que se encuentra bajo efecto Allee y considera migración.

### **Objetivos Específicos**

1. Establecer un modelo poblacional para el Huemul que considere dos parches, efecto Allee y una función de inmigración.
2. Analizar las propiedades cualitativas del modelo matemático planteado.
3. Evaluar mediante simulaciones matemáticas el modelo propuesto.

## Capítulo 2

# Marco teórico

En esta sección se presentarán antecedentes matemáticos relacionados con la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los tópicos a tratar son la existencia soluciones de ecuaciones diferenciales, los sistemas lineales, el polinomio característico, los sistemas no lineales y el principio de estabilidad linealizada. Este marco teórico se sustenta en [13], [5] y [4].

### 2.1. Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y Estabilidad.

La terminología, resultados y demostraciones realizadas en esta sección se basan en las referencias [13] y [5].

**Definición 2.1.** Sea  $t$  un escalar real, sea  $D$  un conjunto abierto en  $R^{n+1}$  con un elemento de  $D$  escrito como  $(t, x)$ , sea  $f : D \rightarrow R^n$  continua y sea  $\dot{x} = dx/dt$ , la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \text{ o, brevemente } \dot{x} = f(t, x). \quad (2.1)$$

Decimos que  $x$  es una solución de (2.1) en un intervalo  $I \subset R$  si  $x$  es continuamente diferenciable definida en  $I$ ,  $(t, x(t)) \in D, t \in I$  y  $x$  satisface (2.1) en  $I$ . Nos referimos a  $f$  como un campo vectorial en  $D$ .

**Teorema 2.1** (Fundamental de Existencia). Si  $f$  es continua en  $D$ , entonces para cualquier  $(t_0, x_0) \in D$ , hay al menos una solución de (2.1) que pasa por el punto  $(t_0, x_0)$ .

**Definición 2.2.** Si  $\phi$  es una solución de una ecuación diferencial en un intervalo  $I$ , se dice que  $\hat{\phi}$  es una continuación de  $\phi$  si  $\hat{\phi}$  se define en un intervalo  $\hat{I}$  que contiene un intervalo  $I$ ,  $\hat{\phi}$  coincide con  $\phi$  en  $I$  y  $\hat{\phi}$  satisface la ecuación diferencial en  $\hat{I}$ . Una solución  $\phi$  no es continuable si no existe tal continuación, es decir, el intervalo  $I$  es el intervalo maximal de existencia de la solución  $\phi$ .



**Teorema 2.2.** Si  $D$  es un conjunto abierto en  $R^{n+1}$ ,  $f : D \rightarrow R^n$  es continua y  $\phi(t)$  es una solución de (2.1) en algún intervalo, entonces hay una continuación de  $\phi$  a un intervalo máximo de existencia. Además, si  $(a, b)$  es un intervalo máximo de existencia de una solución  $x$  de (2.1), entonces  $(t, x(t))$  tiende a la frontera de  $D$  cuando  $t \rightarrow a$  y  $t \rightarrow b$ .

**Definición 2.3.** Una función  $f(t, x)$  definida en un dominio  $D$  en  $R^{n+1}$  se dice que es localmente lipschitziana en  $x$ , si para cualquier conjunto acotado cerrado  $U$  en  $D$  hay un  $k = k_U$  tal que  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|$  para  $(t, x), (t, y)$  en  $U$ . Si  $f(t, x)$  es continua y tiene primeras derivadas parciales con respecto a  $x$  en  $D$ , entonces  $f(t, x)$  es localmente lipschitziana en  $x$ .

**Definición 2.4.** Si  $f(t, x)$  es continua en un dominio  $D$ , entonces el teorema fundamental de existencia implica la existencia de al menos una solución de (2.1) que pasa por un punto dado  $(t_0, x_0)$  en  $D$ . Supongamos, además que solo hay una solución  $x(t, t_0, x_0)$  a través del punto  $(t_0, x_0)$  dado en  $D$ . Para cualquier  $(t_0, x_0) \in D$ , sea  $(a(t_0, x_0), b(t_0, x_0))$  el intervalo maximal de existencia de  $x(t, t_0, x_0)$  y sea  $E \subset R^{n+2}$  definido por

$$E = \{(t, t_0, x_0) : a(t_0, x_0) < t < b(t_0, x_0), (t_0, x_0) \in D\}.$$

La trayectoria a través de  $(t_0, x_0)$  es el conjunto de puntos en  $R^{n+1}$  dado por  $(t, x(t, t_0, x_0))$  para  $t$  variando sobre todos los valores posibles para los cuales  $(t, t_0, x_0)$  pertenece a  $E$ . El conjunto  $E$  se denomina dominio de definición de  $x(t, t_0, x_0)$ .

**Teorema 2.3.** Si  $f(t, x)$  es continua en  $D$  y localmente lipschitziana con respecto a  $x$  en  $D$ , entonces para cualquier  $(t_0, x_0)$  en  $D$ , existe una única solución  $x(t, t_0, x_0)$ ,  $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ , de (2.1) pasando por  $(t_0, x_0)$ . Además, el dominio  $E$  en  $R^{n+2}$  de definición de la función  $x(t, t_0, x_0)$  es abierto y  $x(t, t_0, x_0)$  es continua en  $E$ .

**Definición 2.5.** Sea el sistema que involucra dos ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y). \end{cases} \quad (2.2)$$

Donde las funciones  $F$  y  $G$  son continuas y tienen derivadas parciales continuas en algún dominio  $D$  del plano  $xy$ . El sistema (2.2) no contiene de manera explícita a la variable independiente  $t$ . Se dice que un sistema con esta propiedad es autónomo. El sistema

$$\dot{x} = Ax,$$

en donde  $A$  es una matriz constante de  $2 \times 2$ , es el ejemplo más sencillo de un sistema autónomo bidimensional.

**Definición 2.6.** Los puntos, si los hay, en donde  $f(x) = 0$  se denominan puntos de equilibrio del sistema autónomo  $\dot{x} = f(x)$ . En esos puntos, también  $\dot{x} = 0$ , por lo que los puntos de equilibrio corresponden a soluciones constantes, o de equilibrio, del sistema de ecuaciones diferenciales. Se dice que un punto de equilibrio  $x^*$  del sistema  $\dot{x} = f(x)$  es estable si, dado cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que la solución  $x = \phi(t)$  del sistema (2.2), que en  $t = 0$  satisface  $\|\phi(0) - x^*\| < \delta$ , existe y satisface

$$\|\phi(t) - x^*\| < \epsilon,$$

para todo  $t \geq 0$ . Estas proposiciones matemáticas afirman que todas las soluciones que se inician lo suficientemente cerca (es decir, a menos de la distancia  $\delta$ ) de  $x^*$  permanecen cerca (a menos de la distancia  $\epsilon$ ) de  $x^*$ . Se dice que un punto de equilibrio es **inestable** si es no estable.

**Definición 2.7.** Se dice que un punto de equilibrio  $x^*$  es **asintóticamente estable** si es estable y existe un  $\delta_0$ , con  $0 < \delta_0 < \delta$ , tal que si una solución  $\phi(t)$  satisface  $\|\phi(0) - x^*\| < \delta_0$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = x^*.$$

## 2.2. Sistemas lineales.

La terminología, resultados y demostraciones realizadas en esta sección se basan en la referencia [4].

### 2.2.1. Sistemas lineales.

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases} \quad (2.3)$$

donde  $a, b, c, d$  son constantes (que pueden ser cero). Se dice que éste es un sistema lineal con coeficientes constantes. Las constantes  $a, b, c, d$  son los coeficientes. La linealidad, se refiere al hecho de que las ecuaciones para  $dx/dt$  y para  $dy/dt$  contienen solo primeras potencias de las variables dependientes. Es decir, son funciones lineales de  $x$  y  $y$ . Como los coeficientes  $a, b, c, d$  son constantes este tipo de sistemas del tipo (2.3) son también autónomos y por lo tanto, las curvas soluciones localizadas en el plano de fase no se tocan. Esos sistemas tienen dos variables de estado, por lo cual decimos que son planos o bidimensionales. Podemos emplear

una notación vectorial y matricial para escribir este sistema en forma más eficiente. Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $2 \times 2$  y sea  $Y$  el vector columna de variables dependientes,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Entonces el producto de una matriz  $A$  de orden  $2 \times 2$  y un vector columna  $Y$  es el vector columna  $AY$  dado por:

$$AY = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}.$$

La matriz  $A$  de los coeficientes del sistema se llama matriz de coeficientes. Si  $x$  y  $y$  son variables dependientes, decimos entonces

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}.$$

La notación vectorial puede extenderse para incluir sistemas con cualquier número  $n$  de variables de estado  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . El sistema lineal autónomo con  $n$  variables dependientes es

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

En este caso, los coeficientes de este sistema son  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ . Considerando  $Y, \frac{dY}{dt}$  y la matriz  $A$  de orden  $n \times n$ , respectivamente como,

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

tenemos

$$\frac{dY}{dt} = AY = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

El número de variables dependientes se denomina la dimensión del sistema, por lo que éste es  $n$ -dimensional.

### 2.2.2. Puntos de equilibrio de sistemas lineales.

En este apartado se hará mención a los puntos de equilibrio de un sistema lineal  $\frac{dY}{dt} = AY$ . Si bien la dimensión de la ecuación (2.5) es de orden  $n$ , en nuestro caso estudiaremos un sistema lineal de dimensión 2. Comenzamos buscando las soluciones más simples, es decir, las soluciones de equilibrio. Un punto  $Y_0 = (x_0, y_0)^T$  es un punto de equilibrio de un sistema si y sólo si el campo vectorial en  $Y_0$  es el vector cero. El campo vectorial de un sistema lineal, está dado por

$$F(Y_0) = AY_0,$$

es decir, el vector en  $Y_0$  se determina tomando el producto de la matriz  $A$  y el vector  $Y_0$ . En consecuencia, los puntos de equilibrio son los puntos  $Y_0$  tales que

$$AY_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Escrita de manera escalar, la ecuación vectorial es un par de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 &= 0 \\ cx_0 + dy_0 &= 0. \end{cases}$$

Siendo  $(x_0, y_0)^T = (0, 0)^T$  una solución de esas ecuaciones. Por lo tanto,  $Y_0 = (0, 0)^T$  es un punto de equilibrio y la función constante  $Y(t) = (0, 0)^T, \forall t$  es una solución del sistema lineal, llamada solución trivial del sistema. Cualesquier punto de equilibrio  $(x_0, y_0)^T$  deben también satisfacer

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 &= 0 \\ cx_0 + dy_0 &= 0. \end{cases}$$

Para hallarlos, suponer que  $a \neq 0$ , empleando la primera ecuación, resulta:

$$x_0 = -\frac{b}{a}y_0.$$

Luego, la segunda ecuación resulta  $c\left(-\frac{b}{a}\right)y_0 + dy_0 = 0$ , que puede escribirse como

$$(ad - bc)y_0 = 0.$$

Entonces,  $y_0 = 0$  o  $ad - bc = 0$ . Si  $y_0 = 0$ , se sigue que  $x_0 = 0$ . Un sistema lineal tiene puntos de equilibrio no triviales sólo si  $ad - bc = 0$ .

### 2.2.3. Valores y vectores propios.

En esta subsección mostraremos los teoremas y definiciones que se requieren para definir los conceptos de valores propios y vectores propios.

**Teorema 2.4.** *Si  $A$  es una matriz con  $\det A \neq 0$ , entonces el único punto de equilibrio para el sistema lineal  $dY/dt = AY$  es el origen.*

**Definición 2.8.** *Supongamos que  $dY/dt = AY$  es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.*

1) *Si  $Y(t)$  es una solución de este sistema y  $k$  es cualquier constante, entonces  $kY(t)$  es también una solución-*

2) *Si  $Y_1(t)$  y  $Y_2(t)$  son dos soluciones de este sistema, entonces  $Y_1(t) + Y_2(t)$  es también una solución.*

Mediante el principio de linealidad, se puede construir un número infinito de nuevas soluciones a partir de cualquier solución o par de soluciones dadas. La forma  $k_1Y_1(t) + k_2Y_2(t)$  se llama una combinación lineal de las soluciones  $Y_1(t)$  y  $Y_2(t)$ . Con dos soluciones, podemos producir un número infinito de resultados formando combinaciones lineales de ellas dos.

**Teorema 2.5.** *Supongamos que  $(x_1, y_1)^T$  y  $(x_2, y_2)^T$  son dos vectores columnas linealmente independientes en el plano. Entonces, dado cualquier vector  $(x_0, y_0)^T$  existen  $k_1$  y  $k_2$  tales que:*

$$k_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

*La ecuación anterior representa un sistema de dos ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} x_1k_1 + x_2k_2 &= x_0 \\ y_1k_1 + y_2k_2 &= y_0. \end{cases}$$

**Teorema 2.6.** *Supongamos que  $Y_1(t)$  y  $Y_2(t)$  son soluciones del sistema lineal  $dY/dt = AY$ . Si  $Y_1(0)$  y  $Y_2(0)$  son linealmente independientes, entonces para cualquier condición inicial  $Y(0) = (x_0, y_0)^T$  podemos encontrar constantes  $k_1$  y  $k_2$  tales que  $k_1Y_1(t) + k_2Y_2(t)$  es la solución del problema de valor inicial*

$$\frac{dY}{dt} = AY, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

**Definición 2.9.** *Dada una matriz  $A$ , un número  $\lambda$  se llama valor propio de  $A$  si existe un vector no nulo  $V = (x, y)^T$ , para el cual*

$$AV = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda V.$$

*El vector  $V$  se llama vector propio correspondiente al valor propio  $\lambda$ . Un vector propio es aquel en que el campo vectorial apunta en la misma dirección o en la opuesta al vector mismo.*

**Definición 2.10.** Dada una matriz  $A$ , si  $V$  es un vector propio del valor propio  $\lambda$ , entonces cualquier múltiplo escalar  $kV$  también es un vector propio para  $\lambda$ , es decir:

$$A(kV) = kAV = k(\lambda V) = \lambda(kV).$$

### Determinación de los valores propios.

Para hallar las soluciones características de sistemas lineales, debemos calcular los valores y vectores propios de la respectiva matriz de coeficientes. Es decir, hay que encontrar los vectores  $V = (x, y)^T$  tales que

$$AV = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda V, \text{ con } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

se tiene

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

igualdad que podemos expresar como el sistema:

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y. \end{cases}$$

Este sistema tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Nuestra condición de determinante para una solución no trivial de la ecuación  $AV = \lambda V$  puede plantearse asumiendo que  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

**Definición 2.11.** Para hallar los valores propios de la matriz  $A$  dada en (2.6), debemos determinar los valores de  $\lambda$  para los que

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Luego el determinante resulta:

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (2.7)$$

El polinomio obtenido se denomina polinomio característico del sistema. Sus raíces son los valores propios de la matriz  $A$ .

**Teorema 2.7.** Supongamos que la matriz  $A$  dada en (2.6) tiene un valor propio real  $\lambda$  con vector propio asociado  $V$ . Entonces el sistema lineal  $dY/dt = AY$  tiene la solución característica

$$Y(t) = e^{\lambda t}V.$$

Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son valores propios reales y distintos, cuyos vectores propios respectivos son  $V_1$  y  $V_2$ , entonces las soluciones  $Y_1(t) = e^{\lambda_1 t}V_1$  y  $Y_2(t) = e^{\lambda_2 t}V_2$  son linealmente independientes y  $Y(t) = e^{\lambda_1 t}V_1 + e^{\lambda_2 t}V_2$ , es la solución general del sistema.

#### 2.2.4. Puntos de equilibrio estables e inestables, clasificación

Analizaremos el comportamiento de un sistema lineal de orden  $2 \times 2$  con dos valores propios distintos, no nulos y reales  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

**Teorema 2.8.** Sea  $Y(t)$  una solución real de un sistema lineal con matriz de coeficientes  $A$  de orden  $2 \times 2$  tal que  $\frac{dY}{dt} = AY$ .

- a) Si  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , entonces el origen es un punto silla. Hay dos líneas en el diagrama de fase que corresponden a la solución característica. Las soluciones tienden a  $(0, 0)$  cuando  $t$  se incrementa, y las que se encuentran sobre la otra línea se alejan de  $(0, 0)$ .
- b) Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , entonces el origen es un punto de equilibrio atractor. Todas las soluciones tienden a  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y la mayoría de ellas tienden a  $(0, 0)$  en la dirección del vector propio  $\lambda_2$ .
- c) Si  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ , entonces el origen es un punto de equilibrio repulsor. Todas las soluciones se alejan de  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y una gran parte de ellas lo hacen siguiendo la dirección del vector propio  $\lambda_2$ .

**Teorema 2.9.** Asumiendo que  $\frac{dY}{dt} = AY$  es un sistema lineal con valores propios complejos  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  y  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ . Entonces la solución compleja general del sistema tiene la forma

$$Y(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)Y_0,$$

donde  $Y(0)$  es un vector propio complejo de la matriz  $A$ .

**Teorema 2.10.** Sea un sistema lineal  $\frac{dY}{dt} = AY$  que tiene valores propios complejos dados por  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  y  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , con  $\beta \neq 0$ , entonces,

- a) Si  $\alpha < 0$ , las soluciones se mueven en espiral hacia el origen, el cual se denomina un punto de equilibrio atractor espiral.
- b) Si  $\alpha > 0$ , las soluciones se mueven en espiral alejándose del origen, el cual se denomina un punto de equilibrio repulsor espiral.
- c) Si  $\alpha = 0$ , las soluciones son periódicas. Aquí el origen se llama un centro.

**Teorema 2.11.** Sea un sistema lineal  $\frac{dY}{dt} = AY$  donde  $A$  es la matriz de coeficientes de orden  $2 \times 2$ , cuyos valores propios son iguales, es decir,  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , entonces la solución general del sistema está dada por,

$$Y(t) = k_1 e^{\lambda t} V_1 + k_2 e^{\lambda t} (tV_1 + V_2) = e^{\lambda t} (k_1 V_1 + k_2 V_2) + t e^{\lambda t} k_2 V_1.$$

Además se tiene que,

- a) Si  $\lambda < 0$ , entonces el punto de equilibrio en el origen es un atractor.
- b) Si  $\lambda > 0$ , entonces el punto de equilibrio en el origen es un repulsor.

**Teorema 2.12.** Sea un sistema lineal  $\frac{dY}{dt} = AY$ , tal que la matriz  $A$  tiene valores propios  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 \neq 0$ . Supongamos que  $V_1$  es un vector propio para  $\lambda_1$  y  $V_2$  es un vector propio de  $\lambda_2$ . En este caso tenemos dos valores propios reales y distintos y la solución general del sistema es

$$Y(t) = k_1 V_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} V_2.$$

- a) Si  $\lambda_1 < 0$  entonces el segundo término en la solución general tiende a cero cuando  $t$  crece, por lo que la solución  $Y(t) = k_1 V_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} V_2$ , tiende al punto de equilibrio  $k_1 V_1$  a lo largo de una línea paralela a  $V_2$ .
- b) Si  $\lambda_1 > 0$ , entonces la solución de arriba se aleja de la línea de puntos de equilibrio cuando  $t$  crece.

### 2.2.5. Traza y determinante.

Supongamos que comenzamos con el sistema lineal  $dY/dt = AY$ , donde  $A$  es la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico para  $A$  es  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$ . La cantidad  $a + d$  se llama traza de la matriz  $A$  y como sabemos, la cantidad  $ad - bc$  es el determinante de  $A$ . El polinomio característico de  $A$  entonces puede abreviarse como  $\lambda^2 - T\lambda + D$ , donde  $T = a + d$  es la traza de  $A$  y  $D = ad - bc$  es el determinante de  $A$ . Como el polinomio característico de  $A$  depende sólo de  $T$  y  $D$ , se infiere que los valores propios de  $A$  también están subordinados a esos valores.

Si resolvemos la ecuación característica  $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$ , obtenemos los valores propios

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

Al examinar el discriminante, los valores propios son complejos conjugados si  $T^2 - 4D < 0$ , son repetidos si  $T^2 - 4D = 0$ , y son reales y distintos si  $T^2 - 4D > 0$ .



Por otro lado, si observamos la figura 2.1, tenemos que el eje  $T$  corresponde a la línea horizontal y el eje  $D$  a la línea vertical. Entonces la curva  $T^2 - 4D = 0$ , o bien  $D = \frac{T^2}{4}$  es una parábola concava hacia arriba en este plano. La llamamos la parábola de raíz repetida. Arriba de ésta encontramos  $T^2 - 4D < 0$  y abajo de ella  $T^2 - 4D > 0$ .

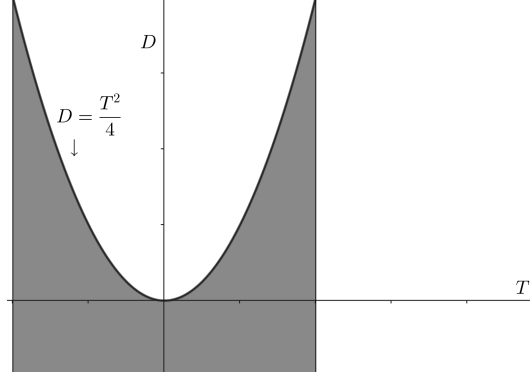


Figura 2.1: Plano  $D$  v/s  $T$ , la región sombreada corresponde a  $T^2 - 4D > 0$

Si  $T^2 - 4D < 0$ , el punto  $(T, D)$  se encuentra arriba de la parábola de raíz repetida, entonces sabemos que los valores propios son complejos y que su parte real es  $T/2$ . Tenemos un atractor espiral si  $T < 0$ , un repulsor si  $T > 0$  y un centro si  $T = 0$ . En el plano traza-determinante el punto  $(T, D)$  está localizado arriba de la parábola de raíz repetida. Si  $(T, D)$  está a la izquierda del eje  $D$ , el sistema correspondiente tiene un atractor espiral, y si se encuentra a la derecha del eje  $D$ , el sistema tiene un repulsor espiral. Si  $(T, D)$  se encuentra sobre el eje  $D$ , entonces el sistema tiene un centro. También es posible distinguir diferentes regiones en el plano traza-determinante donde el sistema lineal tiene valores propios reales y distintos. Podemos observar que aquí  $(T, D)$  se encuentra abajo de la parábola de raíz repetida. Si  $T^2 - 4D > 0$ , los valores propios son

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

Si  $T > 0$  el valor propio  $\frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$ , es la suma de dos términos positivos y por tanto es positiva. En este caso, solo tenemos que determinar el signo del otro valor propio  $\frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$  para conocer el tipo de sistema.

Si  $D = 0$ , este valor propio es cero, por lo que nuestra matriz tiene un valor propio cero y otro positivo. Si  $D > 0$ , entonces  $T^2 - 4D < T^2$ . Como estamos considerando el caso en que  $T > 0$ , tenemos  $\sqrt{T^2 - 4D} < T$  y  $\frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2} > 0$ . En este caso, ambos valores propios son positivos y, como consecuencia, el origen es un repulsor.

Por otra parte, si  $T > 0$  pero  $D < 0$ , entonces  $T^2 - 4D > T^2$ , de manera que  $\sqrt{T^2 - 4D} > T$  y  $\frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2} < 0$ . En esta situación específica el sistema tiene un valor propio positivo y otro negativo, por lo que el origen es un punto silla.

En caso de que  $T < 0$  y  $T^2 - 4D > 0$ , tenemos:

- a) Dos valores propios negativos si  $D > 0$ .
- b) Un valor propio negativo y uno positivo si  $D < 0$ .
- c) Un valor propio negativo y un valor propio cero si  $D = 0$ .

Por último, a lo largo de la parábola de raíz repetida tenemos valores propios repetidos. Si  $T < 0$ , ambos valores propios son negativos, si  $T > 0$ , son positivos y si  $T = 0$ , son cero.

**Remark 2.1.** *Las cuatro curvas solución especiales que tienden hacia un punto silla cuando  $t \rightarrow \infty$  o  $t \rightarrow -\infty$  se denominan separatrices. Y tienen una importancia especial porque separan las soluciones con diferentes comportamientos. Las separatrices estables son aquellas donde las soluciones tienden hacia el punto silla cuando  $t \rightarrow \infty$  mientras que en las separatrices inestables las soluciones tienden hacia el punto silla cuando  $t \rightarrow -\infty$ .*

## 2.3. Sistemas no lineales y Principio de estabilidad linealizada.

En esta sección se estudiarán los sistemas no lineales autónomos, comenzaremos mostrándo cómo puede aproximarse un sistema no lineal a un punto de equilibrio por medio de un sistema lineal. Este proceso es conocido como linealización y es uno de los procedimientos que se aplican con mayor frecuencia.

### 2.3.1. Linealización.

Consideremos la forma general de un sistema no lineal:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases}$$

Supongamos que  $(x_0, y_0)^T$  es un punto de equilibrio para este sistema. Queremos entender lo que sucede con las soluciones cerca de  $(x_0, y_0)^T$ , es decir, linealizar el sistema cerca de  $(x_0, y_0)^T$ . Introducimos nuevas variables

$$u = x - x_0 \quad , \quad v = y - y_0,$$

que mueven el punto de equilibrio al origen. Si  $x$  e  $y$  están cerca del punto de equilibrio  $(x_0, y_0)^T$ , entonces  $u$  y  $v$  tienden a cero. Como  $x = u + x_0$  y  $y = v + y_0$  y los números  $x_0$  y  $y_0$  son constantes, el sistema escrito en términos de  $u$  y  $v$  es

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{d(x-x_0)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x, y) = f(x_0 + u, y_0 + v) \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d(y-y_0)}{dt} = \frac{dy}{dt} = g(x, y) = g(x_0 + u, y_0 + v). \end{cases}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(x_0 + u, y_0 + v) \\ \frac{dv}{dt} = g(x_0 + u, y_0 + v). \end{cases} \quad (2.8)$$

Si  $u = v = 0$ , el lado derecho de este sistema desaparece, por lo que hemos movido el punto de equilibrio al origen en el plano  $uv$ . Ahora, estudiaremos la función analizando la aproximación lineal, la cuál está dada por el plano tangente para funciones de 2 variables, por lo tanto tenemos:

$$f(x_0 + u, y_0 + v) \approx f(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) u + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) v,$$

cuyo lado derecho es la ecuación para el plano tangente a la gráfica de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ . Podemos entonces reescribir el sistema 2.8 como:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) u + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) v + \dots \\ \frac{dv}{dt} = g(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \right) u + \left( \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right) v + \dots \end{cases}$$

Como  $f(x_0, y_0) = 0$  y  $g(x_0, y_0) = 0$ , podemos usar la notación matricial para escribir el sistema en forma breve:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \dots$$

La matriz de  $2 \times 2$  de las derivadas parciales en esta expresión se llama matriz jacobiana del sistema en  $(x_0, y_0)$ . En consecuencia, el sistema linealizado en el punto de equilibrio  $(x_0, y_0)^T$  es:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Empleamos la linealización para estudiar el comportamiento de soluciones del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio  $(x_0, y_0)^T$ . Observamos que para crear el sistema linealizado, sólo necesitamos conocer las derivadas parciales de las componentes del campo vectorial en el punto de equilibrio.

**Remark 2.2.** *Considerando la clasificación de los puntos de equilibrio, además de la linealización de un sistema no lineal, se resume en el cuadro (2.1) la estabilidad de los puntos de equilibrio para las distintas condiciones de los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de un sistema planar:*

Cuadro 2.1: Estabilidad e inestabilidad de los sistemas lineales y casi lineales [5]

$\lambda_1, \lambda_2$	Sistema Lineal		Sistema casi Lineal	
	Tipo	Estabilidad	Tipo	Estabilidad
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	N	Inestable	N	Inestable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	N	Asintóticamente estable	N	Asintóticamente estable
$\lambda_2 > 0 < \lambda_1$	PS	Inestable	PS	Inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	NE o N	Inestable	NE, N o PEs	Inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	NE o N	Asintóticamente estable	NE, N o PEs	Asintóticamente estable
$\lambda_1, \lambda_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda_1 > 0$	PEs	Inestable	PEs	Inestable
$\lambda_1 < 0$	PEs	Asintóticamente estable	PEs	Asintóticamente estable
$\lambda_1 = i\mu, \lambda_2 = -i\mu$	C	Estable	C o PEs	Indeterminada

*Tipo: N: nodo ; NE: nodo estrella ; PS: punto silla ; PEs : punto espiral ; C: centro.*



## Capítulo 3

# Metodología

El desarrollo de esta investigación implica seguir una serie de etapas secuenciales que conduzcan al objetivo de analizar la dinámica de un modelo matemático para la conservación de la especie Huemul, teniendo en cuenta el efecto Allee, crecimiento logístico y migración entre parches acoplados.

Dado que el Huemul se encuentra en una situación crítica de peligro de extinción, resulta de vital importancia contar con herramientas que posibiliten la simulación de diversos escenarios y la evaluación del impacto y la respuesta de la especie frente a distintas perturbaciones.

En primer lugar, se llevará a cabo una búsqueda de antecedentes bibliográficos que respalden el desarrollo del modelo propuesto. Esta etapa permitirá recopilar información relevante y fundamentos teóricos para la construcción del modelo. Posteriormente, se procederá a elaborar un modelo poblacional para el Huemul que considere dos parches, efecto Allee y una función de inmigración. Se buscará establecer relaciones y ecuaciones que representen de manera precisa la dinámica del sistema. Una vez que el modelo matemático esté construido, se realizará un estudio analítico de las propiedades cualitativas del modelo, tales como puntos de equilibrio, linealización del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal y la estabilidad local de un punto de equilibrio.

Finalmente, se llevarán a cabo simulaciones utilizando diferentes combinaciones de parámetros. Esto permitirá explorar diversos escenarios y obtener resultados que ayuden a comprender el comportamiento de la especie y evaluar su respuesta frente a perturbaciones. Es importante destacar que cada etapa será realizada de manera rigurosa, con el objetivo de asegurar la calidad y la validez del modelo propuesto.

En la figura (3.1) se muestra el diagrama de la metodología a emplear para la presente investigación.

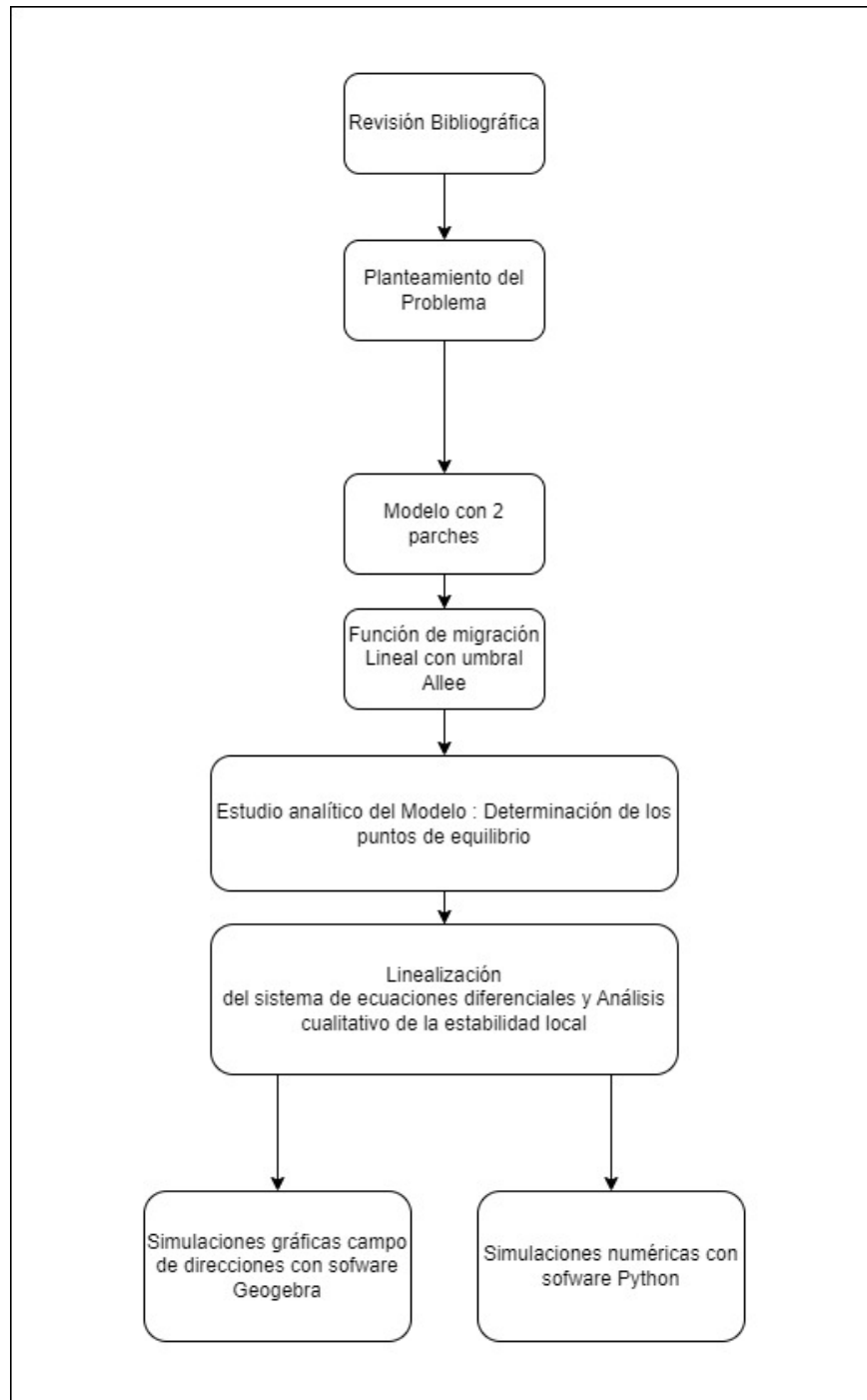


Figura 3.1: Diagrama de la metodología de estudio

### 3.1. Metodología de modelamiento matemático

Ante la presencia del fenómeno del Efecto Allee, resulta necesario intervenir con el objetivo de promover la recuperación de los niveles de población que permitan la supervivencia natural de la especie. Una estrategia empleada consiste en la introducción de nuevos individuos en el hábitat de la especie afectada [19]. En este contexto, una estrategia natural consiste en establecer un flujo migratorio que esté determinado por el nivel poblacional de la especie. De esta forma, se fomenta una migración más intensa en momentos de baja densidad poblacional, mientras que se detiene por completo cuando la población alcanza la capacidad de carga del medio ambiente. Dicha estrategia permite regular la distribución y el movimiento de los individuos de manera acorde a las condiciones del entorno, contribuyendo así a la recuperación de la población [19].

Cabe mencionar que existe una amplia variedad de estudios que abordan el análisis y modelado del efecto Allee en enfoques deterministas, por ejemplo [1, 3, 8, 23]. Estos modelos emplean ecuaciones diferenciales ordinarias para representar y comprender la dinámica poblacional. Es relevante destacar que una de las posibles aproximaciones para abordar el efecto Allee, en cual la baja tasa de encuentros entre individuos juega un papel fundamental, es mediante el uso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [19].

El efecto Allee y el crecimiento logístico de una población se modela [1], mediante la ecuación de la forma,

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{m} - 1\right).$$

Además podemos plantear un modelo de metapoblación, ver [6, 9, 14, 21]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1) - m_1x_1 + m_2x_2 \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_2) - m_2x_2 + m_1x_1. \end{cases}$$

La metapoblación representada en el modelo está formada por distintos parches donde coexisten poblaciones de la misma especie, aunque con tamaños poblacionales diversos. En cada parche, estas poblaciones alcanzarán su capacidad máxima de acuerdo con las condiciones ambientales específicas. Como resultado, se genera una dinámica poblacional que implica el desplazamiento de individuos de un parche a otro, lo que a su vez conlleva a la colonización o abandono de dichos parches. Estos movimientos se llevan a cabo a través de corredores que conectan los distintos parches.

Asumiremos que cuando la población aumenta hasta alcanzar la capacidad de carga, la inmigración es nula. Mientras que cuando la población disminuye a cero, la inmigración aumenta. En base a las ecuaciones y las hipótesis previamente mencionadas, el modelo para describir la dinámica de poblaciones se expresa mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) \left(\frac{x_1}{m} - 1\right) + x_2 f(x_1) \\ \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - x_2 f(x_1). \end{cases}$$

### 3.2. Metodología de aplicación de las teorías matemáticas

Se demostrará la existencia de soluciones del modelo empleando los teoremas afines existentes en la literatura [4] , [13]. En particular un problema de valor inicial con dato inicial positivo genera una solución no negativa.

Se llevará a cabo un estudio cualitativo del sistema no lineal mediante la determinación de los puntos de equilibrio. Posteriormente, se procederá a realizar la linealización correspondiente con el objetivo de obtener el polinomio característico, el cual nos brindará información sobre los valores propios del sistema. Esta caracterización de los puntos de equilibrio nos permitirá analizar la estabilidad de los mismos y, a su vez construir los campos de direcciones correspondientes. [4].

### 3.3. Metodología de aplicación de metodos numéricos

Las simulaciones matemáticas para el modelo con dos parches, se realizarán para analizar y evaluar el modelo propuesto, mediante las funciones disponibles en matplotlib.pyplot. Los campos de direcciones y los puntos de equilibrio se representarán mediante programa Geogebra.

### 3.4. Discusión Metodológica

Los fundamentos de nuestro modelo matemático están de acuerdo con la literatura abordada acerca del efecto Allee, además si consideramos la presencia de dos parches y una función de inmigración, nuestro modelo es coherente con aquellos de metapoblación. Vale la pena reconocer que nuestro enfoque es determinista y no consideramos un enfoque espacial de la población. Este aspecto podría ser estudiado e incluido en un trabajo futuro, en este sentido se podrían considerar un modelo basado en ecuaciones en derivadas parciales. Además el estudio de las propiedades cualitativas de un sistema planar suele realizarse por medio del estudio de la estabilidad de sus puntos de equilibrio. Lo anterior está acorde con diferentes trabajos en la materia [12] , [19].

Diferentes trabajos han considerado una especie con efecto Allee, en nuestro caso estamos considerando cómo prevenir la extinción bajo el efecto Allee lo cuál es novedoso. En este trabajo, se amplía el modelo estudiado por [19] a un modelo de dos parches, además de

emplear técnicas diferentes a las utilizadas en el artículo antes mencionado, para abordar el sistema de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, en [12] consideran el análisis de un modelo depredador-presa derivado del modelo Leslie-Gower, donde el efecto Allee en el modelo contempla una función de crecimiento de la presa. Se demuestra que el efecto Allee modifica significativamente la dinámica del sistema original. El modelo es bidimensional y los autores demostraron la existencia de soluciones no negativas generadas a partir de una condición inicial positiva. Además, determinaron los puntos de equilibrio de la ecuación y se estudió la linealización del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal. Junto a ello, demostraron la existencia de subconjuntos de parámetros para los cuales el sistema puede tener Bifurcación de Bogdanov-Takens, Curvas homoclínicas, Bifurcación de Hopf y la existencia de dos ciclos límite. El alcance de nuestra metodología no considera un estudio acabado de las bifurcaciones, solo la estabilidad de los puntos de equilibrio mediante la linealización de la ecuación diferencial.



## Capítulo 4

# Resultados

En este capítulo, se exponen los resultados fundamentales de la presente investigación, que presenta un modelo matemático que incorpora dos parches ecológicos, el fenómeno Allee y una función de inmigración específica para la especie Huemul. La exposición inicia con el análisis del modelo propuesto para dos parches, detallando sus propiedades cualitativas y destacando los resultados más relevantes obtenidos a través del campo de direcciones y simulaciones numéricas.

### 4.1. Formulación del modelo

El modelo propuesto se construyó en base a la ecuación de crecimiento logístico de una población y una expresión que representa el efecto Allee. Junto con ello se incorpora una función migración de la forma,

$$f(x, y) = ry \left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que se obtiene es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{m} - 1\right) + ry \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ \dot{y} &= ry \left(1 - \frac{y}{m}\right) - ry \left(1 - \frac{x}{K}\right) \end{cases}, \quad (4.1)$$

donde  $x(t)$  e  $y(t)$  representan las poblaciones en el tiempo  $t$ ,  $K$  es la capacidad de carga del medio,  $m$  representa el umbral Allee y  $r$  corresponden a las tasas intrínsecas de crecimiento de  $x$  e  $y$  respectivamente.

## 4.2. Equilibrios del modelo

Se procedió a determinar los puntos de equilibrio comenzando con igualar la segunda ecuación de (4.1) a cero, para luego despejar la variable  $y$ :

$$ry \left[ \left( 1 - \frac{y}{m} \right) - \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \right] = 0,$$

de donde obtenemos,

$$y = 0 \quad , \quad -\frac{y}{m} + \frac{x}{K} = 0. \quad (4.2)$$

El valor obtenido  $y = 0$  lo reemplazamos en la primera ecuación de (4.1):

$$rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \left( \frac{x}{m} - 1 \right) + ry \left( 1 - \frac{x}{K} \right) = 0,$$

luego,

$$x = 0 \quad , \quad x = K \quad , \quad x = m.$$

Por lo tanto, obtenemos los puntos de equilibrio:  $P_1(0,0)$  ,  $P_2(K,0)$  ,  $P_3(m,0)$ .

De la ecuación (4.2)

$$-\frac{y}{m} + \frac{x}{K} = 0,$$

obtenemos

$$y = \frac{mx}{K} \quad (4.3)$$

Ahora reemplazamos la ecuación (4.3) en la primera ecuación de (4.1):

$$rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \left( \frac{x}{m} - 1 \right) + r \frac{mx}{K} \left( 1 - \frac{x}{K} \right) = 0,$$

factorizamos esta ecuación por  $(K - x)$  resulta:

$$(K - x) \left[ \frac{rx}{K} \left( \frac{x}{m} - 1 \right) + \frac{rmx}{K^2} \right] = 0. \quad (4.4)$$

De la ecuación (4.4) obtenemos:

$$x = K, \quad (4.5)$$

$$\frac{rx}{K} \left( \frac{x}{m} - 1 \right) + \frac{rmx}{K^2} = 0. \quad (4.6)$$

Luego, reemplazamos (4.5) en la segunda ecuación de (4.1) y obtenemos:  $y = 0$  e  $y = m$ .

Así se obtienen los puntos de equilibrio  $(K,0)$  y  $(K,m)$ , pero  $(K,0)$  es igual a  $P_2$ . Por lo tanto el cuarto punto de equilibrio es  $P_4(K,m)$ .

Desarrollamos la ecuación (4.6) :

$$\frac{rx}{K} \left( \frac{x}{m} - 1 \right) + \frac{rmx}{K^2} = 0,$$

se tiene

$$x \left[ \frac{r}{K} \left( \frac{x}{m} - 1 \right) + \frac{rm}{K^2} \right] = 0,$$

obtenemos:

$$x = 0, \tag{4.7}$$

$$x = m - \frac{m^2}{K}. \tag{4.8}$$

Reemplazamos (4.7) en la segunda ecuación de (4.1) y obtenemos  $y = 0$ , luego se obtiene el punto de equilibrio  $P_1(0, 0)$  encontrado anteriormente.

Ahora, reemplazamos (4.8) en (4.3) obtenemos:

$$y = \frac{m^2}{K} - \frac{m^3}{K^2}.$$

Por lo tanto obtenemos el punto de equilibrio  $P_5(m - \frac{m^2}{K}, \frac{m^2}{K} - \frac{m^3}{K^2})$ .

Los puntos de equilibrio obtenidos a analizar son los siguientes:

$$P_1(0, 0), P_2(K, 0), P_3(m, 0), P_4(K, m), P_5\left(m - \frac{m^2}{K}, \frac{m^2}{K} - \frac{m^3}{K^2}\right).$$

### 4.3. Análisis de estabilidad local de los equilibrios

Para analizar la estabilidad de las soluciones obtenemos las derivadas parciales respectivas del sistema de ecuaciones diferenciales (4.1), resulta la matriz:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{2rx}{m} - r - \frac{3x^2r}{Km} + \frac{2xr}{K} - \frac{ry}{K} & r(1 - \frac{x}{K}) \\ \frac{ry}{K} & -\frac{2ry}{m} + \frac{rx}{K} \end{bmatrix}.$$

Y se define la ecuación característica como:

$$|J - \lambda I| = 0.$$

a) **Análisis para el punto  $(0,0)$**

Al evaluar el punto de equilibrio en la matriz  $J$  resulta:

$$J(0,0)^T = \begin{bmatrix} -r & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica queda definida como:

$$\begin{vmatrix} -r - \lambda & r \\ 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Siendo el polinomio característico obtenido:

$$\lambda^2 + \lambda r = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que los valores de  $\lambda$  corresponden a  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -r < 0$ ; como los valores propios son reales y distintos, el punto  $(x, y)^T = (0, 0)^T$  es inestable y corresponde a un punto silla.

b) **Análisis para el punto  $(K,0)$**

Al evaluar el punto de equilibrio en la matriz  $J$  resulta:

$$J(K,0)^T = \begin{bmatrix} -\frac{Kr}{m} + r & -r \\ 0 & r \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica queda definida como:

$$\begin{vmatrix} -\frac{Kr}{m} + r - \lambda & -r \\ 0 & r - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Siendo el polinomio característico obtenido:

$$\lambda^2 + \lambda \left( \frac{Kr}{m} - 2r \right) - \frac{Kr^2}{m} + r^2 = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que los valores propios son reales y distintos, y corresponden a  $\lambda_1 = r > 0$  y  $\lambda_2 = r - \frac{Kr}{m} = r(1 - \frac{K}{m}) < 0$ , por la tabla (2.1) el punto de equilibrio  $(x, y)^T = (K, 0)^T$  es inestable y corresponde a un punto silla.

c) **Análisis para el punto  $(m, 0)$**

Al evaluar el punto de equilibrio en la matriz  $J$  resulta:

$$J(m, 0)^T = \begin{bmatrix} r - \frac{mr}{K} & r \left(1 - \frac{m}{K}\right) \\ 0 & \frac{mr}{K} \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica queda definida como:

$$\begin{vmatrix} r - \frac{mr}{K} - \lambda & r \left(1 - \frac{m}{K}\right) \\ 0 & \frac{mr}{K} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Siendo el polinomio característico obtenido:

$$\lambda^2 - r\lambda + \frac{mr^2}{K} - \frac{m^2r^2}{K^2} = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que los valores de  $\lambda$  corresponden a

$$\lambda_1 = \frac{r + \sqrt{r^2 - \frac{4mr^2}{K} + \frac{4m^2r^2}{K^2}}}{2} = r - \frac{rm}{K}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{r - \sqrt{r^2 - \frac{4mr^2}{K} + \frac{4m^2r^2}{K^2}}}{2} = \frac{rm}{K},$$

como  $\lambda_1 = r - \frac{rm}{K} = r(1 - \frac{m}{K}) > 0$  y  $\lambda_2 = \frac{rm}{K} > 0$ , los valores propios son reales, positivos y distintos, por la tabla (2.1) el punto de equilibrio  $(x, y)^T = (m, 0)^T$  es un punto fijo inestable y corresponde a un nodo.

d) **Análisis para el punto  $(K, m)$**

Al evaluar el punto de equilibrio en la matriz  $J$  resulta:

$$J(K, m)^T = \begin{bmatrix} -\frac{Kr}{m} + r - \frac{mr}{K} & 0 \\ \frac{rm}{K} & -r \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica queda definida como:



$$\begin{vmatrix} -\frac{Kr}{m} + r - \frac{mr}{K} - \lambda & 0 \\ \frac{rm}{K} & -r - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Siendo el polinomio característico obtenido:

$$\lambda^2 + r \left( \frac{K}{m} + \frac{m}{K} \right) \lambda + r^2 \left( \frac{K}{m} - 1 + \frac{m}{K} \right) = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que los valores de  $\lambda$  corresponden a:

$$\lambda_1 = \frac{r}{2} \left[ - \left( \frac{K}{m} + \frac{m}{K} \right) + \sqrt{\left( \frac{K}{m} + \frac{m}{K} \right)^2 - 4 \left( \frac{K}{m} - 1 + \frac{m}{K} \right)} \right]$$

y

$$\lambda_2 = \frac{r}{2} \left[ - \left( \frac{K}{m} + \frac{m}{K} \right) - \sqrt{\left( \frac{K}{m} + \frac{m}{K} \right)^2 - 4 \left( \frac{K}{m} - 1 + \frac{m}{K} \right)} \right].$$

Para determinar la naturaleza de los valores propios, se procede a analizar el discriminante

$$\Delta = \frac{K^2}{m^2} + 6 + \frac{m^2}{K^2} - 4 \frac{K}{m} - 4 \frac{m}{K}.$$

Analizaremos este discriminante haciendo  $u = \frac{m}{K}$ , generando la función:

$$f(u) = u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 4u + 1,$$

cuya gráfica está dada en la figura (4.1).

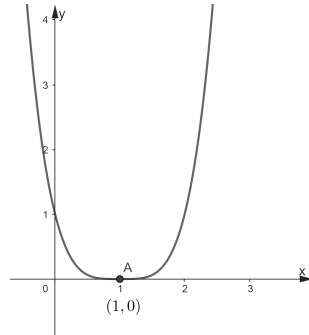


Figura 4.1: Gráfica de la función  $f(u) = u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 4u + 1$

Analizamos la gráfica de esta función y observamos que,

- d1) Si  $f(u) = 0$  entonces su única raíz  $u = 1$  y se sigue que  $\frac{m}{K} = 1$  entonces  $K = m$ , lo que representa una contradicción puesto que  $K > m$ . Luego  $\Delta \neq 0$ .
- d2) Notamos que  $f(u)$ , función polinómica de grado cuatro, es cóncava hacia arriba con única intersección en el eje  $X$ , el punto  $(1, 0)$  luego  $\Delta > 0$ .

Entonces se sigue que:

$$\left(\frac{K}{m} + \frac{m}{K}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{K}{m} - 1 + \frac{m}{K}\right) > 0. \quad (4.9)$$

Desarrollando la desigualdad, (4.9)

$$\begin{aligned} \left(\frac{K}{m} + \frac{m}{K}\right)^2 &> 4 \cdot \left(\frac{K}{m} + \frac{m}{K} - 1\right) \\ \left(\frac{K}{m} + \frac{m}{K}\right)^2 &> 4 \cdot \left(\frac{K}{m} + \frac{m}{K}\right) > 4 \cdot \left(\frac{K}{m} + \frac{m}{K} - 1\right) \\ \left(\frac{K}{m} + \frac{m}{K}\right)^2 &> 4 \cdot \left(\frac{K}{m} + \frac{m}{K}\right). \end{aligned}$$

De donde se sigue que,

$$\frac{K}{m} + \frac{m}{K} > 4. \quad (4.10)$$

Considerando que  $\frac{m}{K}$  es un valor muy pequeño, entonces por (4.10) obtenemos  $K > 4m$ .

De acuerdo el análisis anterior, concluimos que si  $\Delta > 0$  y  $K > 4m$ , los valores propios son reales, distintos y negativos, por la tabla (2.1) el punto de equilibrio dado por  $(x, y)^T = (K, m)^T$  es un nodo asintóticamente estable (atractor).

e) **Análisis para el punto**  $\left(m - \frac{m^2}{K}, \frac{m^2}{K} - \frac{m^3}{K^2}\right)$

Al evaluar el punto de equilibrio en la matriz  $J$  resulta:

$$J\left(m - \frac{m^2}{K}, \frac{m^2}{K} - \frac{m^3}{K^2}\right)^T = \begin{bmatrix} r - 3\frac{rm}{K} + 3\frac{rm^2}{K^2} - 2\frac{rm^3}{K^3} & r - \frac{rm}{K} + \frac{rm^2}{K^2} \\ \frac{rm^2}{K^2} - \frac{rm^3}{K^3} & -\frac{rm}{K} + \frac{rm^2}{K^2} \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica queda definida como:

$$\begin{vmatrix} r - 3\frac{rm}{K} + 3\frac{rm^2}{K^2} - 2\frac{rm^3}{K^3} - \lambda & r - \frac{rm}{K} + \frac{rm^2}{K^2} \\ \frac{rm^2}{K^2} - \frac{rm^3}{K^3} & -\frac{rm}{K} + \frac{rm^2}{K^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Siendo el polinomio característico obtenido:

$$\lambda^2 + \left( -r + 4 \frac{rm}{K} - 4 \frac{rm^2}{K^2} + 2 \frac{rm^3}{K^3} \right) \lambda - \frac{r^2m}{K} + 3 \frac{r^2m^2}{K^2} - 4 \frac{r^2m^3}{K^3} + 3 \frac{r^2m^4}{K^4} - \frac{r^2m^5}{K^5} = 0.$$

Para determinar la naturaleza de los valores propios, se procede al siguiente análisis de la ecuación de segundo grado de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde,

$$a = 1, \quad b = -r + 4 \frac{rm}{K} - 4 \frac{rm^2}{K^2} + 2 \frac{rm^3}{K^3}, \quad c = -\frac{r^2m}{K} + 3 \frac{r^2m^2}{K^2} - 4 \frac{r^2m^3}{K^3} + 3 \frac{r^2m^4}{K^4} - \frac{r^2m^5}{K^5}.$$

Ahora estudiaremos el parámetro  $b$  de la ecuación de segundo grado, para analizar los casos  $b = 0$ ,  $b > 0$  y  $b < 0$ . de esta forma podremos determinar la naturaleza de los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

**Caso I.** Analizamos cuando  $b = 0$ , es decir,

$$b = -r + 4 \frac{rm}{K} - 4 \frac{rm^2}{K^2} + 2 \frac{rm^3}{K^3} = 0,$$

dividiendo por  $r$  se obtiene:

$$-1 + 4 \frac{m}{K} - 4 \frac{m^2}{K^2} + 2 \frac{m^3}{K^3} = 0,$$

hacemos  $u = \frac{m}{K}$  generando la función :

$$f(u) = 2u^3 - 4u^2 + 4u - 1, \quad (4.11)$$

cuya gráfica está dada en la figura (4.2):

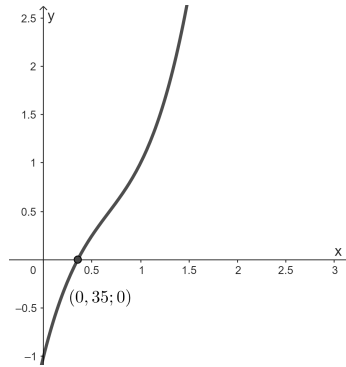


Figura 4.2: Gráfica de la función  $f(u) = 2u^3 - 4u^2 + 4u - 1$

Observamos que cuando  $u = 0.35$ , es decir,  $m = 0.35K$  se tiene que  $b = 0$ .

Se sigue que,

$$\lambda^2 - c = \lambda^2 - \left( \frac{r^2 m}{K} - 3 \frac{r^2 m^2}{K^2} + 4 \frac{r^2 m^3}{K^3} - 3 \frac{r^2 m^4}{K^4} + \frac{r^2 m^5}{K^5} \right) = 0,$$

Obtenemos

$$\lambda = \pm \sqrt{c} = \pm \sqrt{\frac{r^2 m}{K} - 3 \frac{r^2 m^2}{K^2} + 4 \frac{r^2 m^3}{K^3} - 3 \frac{r^2 m^4}{K^4} + \frac{r^2 m^5}{K^5}}.$$

Examinamos el signo de  $c$  suponiendo que  $c = 0$ , es decir,

$$\frac{r^2 m}{K} - 3 \frac{r^2 m^2}{K^2} + 4 \frac{r^2 m^3}{K^3} - 3 \frac{r^2 m^4}{K^4} + \frac{r^2 m^5}{K^5} = 0,$$

multiplicando por  $\frac{K}{r^2 m}$  se sigue que,

$$1 - 3 \frac{m}{K} + 4 \frac{m^2}{K^2} - 3 \frac{m^3}{K^3} + \frac{m^4}{K^4} = 0.$$

Hacemos  $u = \frac{m}{K}$  generamos la función

$$g(u) = u^4 - 3u^3 + 4u^2 - 3u + 1,$$

cuya gráfica está dada por la figura (4.3)

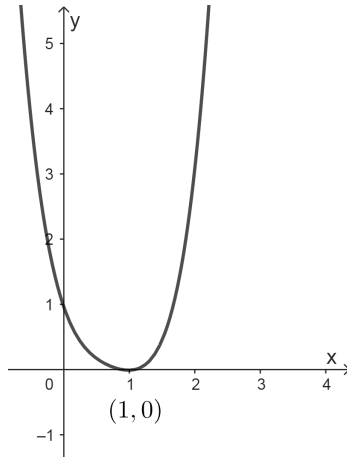


Figura 4.3: Gráfica de la función  $g(u) = u^4 - 3u^3 + 4u^2 - 3u + 1$

De la figura (4.3) se infiere que si  $u = 1$ , entonces  $m = K$ , que es una contradicción y luego  $c \neq 0$ , más aún de la misma figura se aprecia que  $c > 0$ .

Finalmente los valores propios

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{r^2 m}{K} - 3 \frac{r^2 m^2}{K^2} + 4 \frac{r^2 m^3}{K^3} - 3 \frac{r^2 m^4}{K^4} + \frac{r^2 m^5}{K^5}} > 0$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{r^2 m}{K} - 3 \frac{r^2 m^2}{K^2} + 4 \frac{r^2 m^3}{K^3} - 3 \frac{r^2 m^4}{K^4} + \frac{r^2 m^5}{K^5}} < 0.$$

**Caso II.** Analizamos cuando  $b > 0$ . La función polinómica de grado tres, dada en (4.11), es concava hacia arriba para el intervalo  $]0.35, +\infty[$ . Concluimos que el valor  $b$  es positivo cuando  $u \in ]0.35, +\infty[$ , luego:  $\frac{m}{K} > 0.35$ , sin embargo debemos considerar la condición  $\frac{m}{K} < 1$ ; por lo tanto  $\frac{m}{K} \in ]0.35, 1[$ . Analizado lo anterior, tenemos:

i) Si  $b > 0$  con  $\frac{m}{K} \in ]0.35, 1[$ .

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}).$$

Realizando el análisis del discriminante

$$\Delta = 1 - 4 \frac{m}{K} + 12 \frac{m^2}{K^2} - 20 \frac{m^3}{K^3} + 20 \frac{m^4}{K^4} - 12 \frac{m^5}{K^5} + 4 \frac{m^6}{K^6}.$$

Analizaremos este discriminante haciendo  $u = \frac{m}{K}$ , generando la función:

$$f(u) = 4u^6 - 12u^5 + 20u^4 - 20u^3 + 12u^2 - 4u + 1,$$

cuya gráfica está dada en la figura (4.4), que nos muestra  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ . Así obtenemos 2 valores propios distintos y reales.

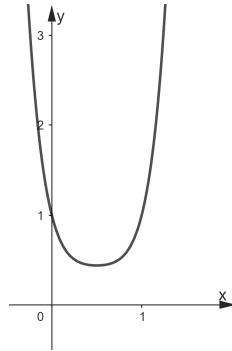


Figura 4.4: Gráfica de la función  $f(u) = 4u^6 - 12u^5 + 20u^4 - 20u^3 + 12u^2 - 4u + 1$ .

Para analizar el valor propio  $\lambda_1$  supondremos que  $\sqrt{b^2 - 4ac} < b$ , luego  $c > 0$ . Como

$$c = -\frac{r^2 m}{K} + 3 \frac{r^2 m^2}{K^2} - 4 \frac{r^2 m^3}{K^3} + 3 \frac{r^2 m^4}{K^4} - \frac{r^2 m^5}{K^5},$$

se sigue que:

$$-\frac{m}{K} + 3 \frac{m^2}{K^2} - 4 \frac{m^3}{K^3} + 3 \frac{m^4}{K^4} - \frac{m^5}{K^5} > 0.$$

Hacemos  $u = \frac{m}{K}$ ,

$$-u^5 + 3u^4 - 4u^3 + 3u^2 - u > 0,$$

factorizamos por  $u$ ,

$$u(-u^4 + 3u^3 - 4u^2 + 3u - 1) > 0,$$

obtenemos,

$$u > 0 \quad , \quad -u^4 + 3u^3 - 4u^2 + 3u - 1 > 0.$$

Construimos la función  $f(u) = -u^4 + 3u^3 - 4u^2 + 3u - 1$ , cuya gráfica se muestra en la figura (4.5):

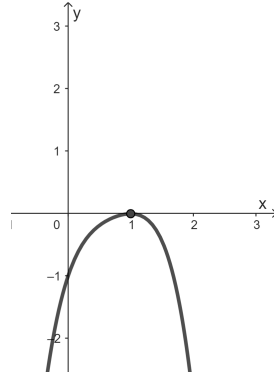


Figura 4.5: Gráfica de la función  $f(u) = -u^4 + 3u^3 - 4u^2 + 3u - 1$ .

Como la función  $f(u)$  es cóncava hacia abajo, claramente se observa que  $c < 0$ , luego se debe cumplir que  $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ , por lo tanto el valor propio  $\lambda_1$  es positivo. Por otro lado,  $b > 0$  entonces la expresión  $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ , luego el valor propio  $\lambda_2$  es negativo.

ii) Si  $b < 0$  con  $\frac{m}{K} \in ]0, 0.35[$ .

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}).$$

Como  $b < 0$  entonces la expresión  $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$  es positiva, por lo tanto el valor propio  $\lambda_1$  es positivo. Por otra parte, como  $-b > 0$  entonces se tiene que la expresión  $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$  es negativa, por lo tanto el valor propio  $\lambda_2$  es negativo.

Finalmente, se concluye que los valores propios son reales y distintos, por la tabla (2.1) el punto de equilibrio  $(x, y)^T = \left(m - \frac{m^2}{K}, \frac{m^2}{K} - \frac{m^3}{K^2}\right)^T$  es un punto silla.

#### 4.4. Campo de Direcciones

En esta sección se mostrará el cuadro con los valores de cada parámetro y la simulación del campo de direcciones mediante software Geogebra para 4 puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales:

- Punto de equilibrio  $(x, y)^T = (K, m)^T$  atractor estable,  $0 < r \leq 1$  y  $K > 4m$ .

Cuadro 4.1: Parámetros simulación modelo		
Parámetros	Descripción	Valores
$r$	Tasa intrínseca per cápita	1
$m$	Umbral Allee	20
$K$	Capacidad de carga ambiental	90

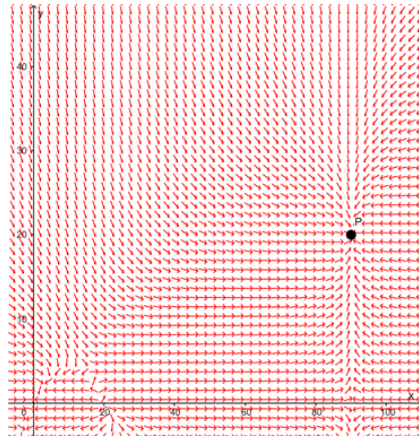


Figura 4.6: Punto de equilibrio  $(K, m)^T$

- Punto de equilibrio  $(x, y)^T = (K, 0)^T$  inestable,  $0 < r \leq 1$  y  $\frac{K}{m} > 1$ :

Cuadro 4.2: Parámetros simulación modelo		
Parámetros	Descripción	Valores
$r$	Tasa intrínseca per cápita	0.5
$m$	Umbral Allee	30
$K$	Capacidad de carga ambiental	40

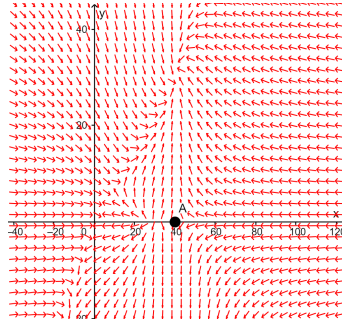


Figura 4.7: Punto de equilibrio  $(K, 0)^T$

- Punto de equilibrio  $(x, y)^T = (m, 0)^T$  inestable,  $0 < r \leq 1$  ;  $r(1 - \frac{m}{K}) > 0$  ;  $\frac{rm}{K} > 0$  y  $\frac{K}{m} > 1$ .

Cuadro 4.3: Parámetros simulación modelo		
Parámetros	Descripción	Valores
$r$	Tasa intrínseca per cápita	0.9
$m$	Umbral Allee	20
$K$	Capacidad de carga ambiental	100

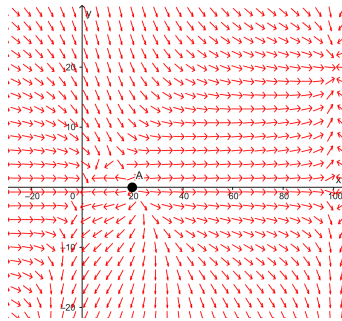


Figura 4.8: Punto de equilibrio  $(m, 0)^T$



- Punto de equilibrio  $(x, y)^T = (m - \frac{m^2}{K}, \frac{m^2}{K} - \frac{m^3}{K^2})^T$  inestable,  $0 < r \leq 1$  y  $0.35 < \frac{m}{K} < 1$ .

Cuadro 4.4: Parámetros simulación modelo		
Parámetros	Descripción	Valores
$r$	Tasa intrínseca per cápita	1
$m$	Umbral Allee	35
$K$	Capacidad de carga ambiental	70

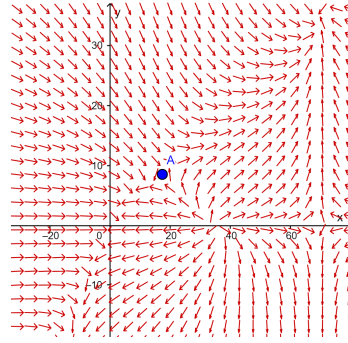


Figura 4.9: Punto de equilibrio  $(m - \frac{m^2}{K}, \frac{m^2}{K} - \frac{m^3}{K^2})^T$

## 4.5. Simulaciones numéricas

Para las simulaciones numéricas del modelo propuesto se consideró el punto de equilibrio  $(x, y)^T = (K, m)^T$  con las condiciones  $0 < r \leq 1$  y  $K > 4m$ , los valores de cada parámetro están señalados en cada figura, realizando un total de 2 simulaciones.

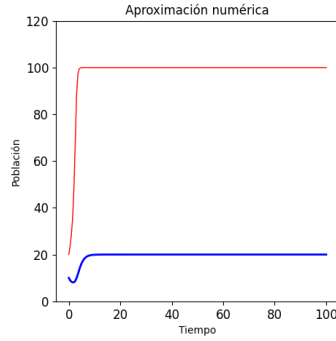


Figura 4.10: Población v/s Tiempo  
 $r = 0,8; m = 20; K = 100$  ; parche 1 : linea roja ; parche 2: linea azul

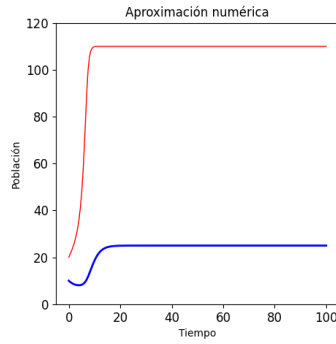


Figura 4.11: Población v/s Tiempo  
 $r = 0,5; m = 25; K = 110$  ; parche 1: linea roja ; parche 2: linea azul



## Capítulo 5

# Conclusiones

El modelo propuesto en este trabajo se fundamenta en base a las ecuaciones de crecimiento poblacional, crecimiento logístico y una expresión matemática que representa el efecto Allee fuerte, junto con ello una función migración  $f(x, y) = ry(1 - \frac{x}{K})$ , desde un parche ecologico 2 (reserva de huemules) hacia un parche ecologico 1. En este escenario, el parche ecologico 1 exhibe una población considerablemente reducida en comparación con su capacidad de carga, situándose por debajo del umbral Allee, es decir, adoptando un comportamiento logístico con efecto Allee. Cabe señalar que no existen modelos matemáticos previos aplicados y relacionados al estudio de la especie Huemul. Los parámetros fundamentales en el modelo corresponden:

- $K$  : Capacidad de carga ambiental.
- $m$  : Umbral Allee.
- $r$  : Tasa intrínseca de crecimiento poblacional.

El objetivo de la función migración  $f(x, y) = ry(1 - \frac{x}{K})$  es evitar la extinción de la especie en estudio, en este sentido se consideraron tasas de reproducción iguales en ambos parches ecológicos.

Se determinaron algebraicamente los equilibrios del sistema (4.1), siendo posible estudiar su estabilidad local. La estabilidad es la siguiente:

- punto de equilibrio  $(x, y)^T = (0, 0)^T$  es inestable (punto silla), los valores propios son reales y distintos.
- punto de equilibrio  $(x, y)^T = (K, 0)^T$  es un punto silla.
- punto de equilibrio  $(x, y)^T = (m, 0)^T$  es un nodo.
- punto de equilibrio  $(x, y)^T = (K, m)^T$  es un nodo asintóticamente estable.
- punto de equilibrio  $(x, y)^T = (m - \frac{m^2}{K}, \frac{m^2}{K} - \frac{m^3}{K^2})^T$  es un punto silla.

La simulación del campo de direcciones del punto de equilibrio  $(x, y)^T = (0, 0)^T$  no se realizó puesto desde una perspectiva ecológica, este punto indica la ausencia de especies en ambos parches ecológicos.

Las simulaciones de los campos de direcciones mediante Geogebra, muestran que los puntos de equilibrio  $(x, y)^T = (K, 0)^T$ ,  $(x, y)^T = (m, 0)^T$ ,  $(x, y)^T = (m - \frac{m^2}{K}, \frac{m^2}{K} - \frac{m^3}{K^2})^T$  son inestables localmente, la estabilidad local de estos tres puntos está sujeta a las condiciones:  $0 < r \leq 1$ ;  $\frac{K}{m} > 1$ ;  $r(1 - \frac{m}{K}) > 0$ ;  $\frac{rm}{K} > 0$ ;  $0.35 < \frac{m}{K} < 1$ .

Las simulación del campo de direcciones mediante Geogebra, muestra que el punto de equilibrio  $(x, y)^T = (K, m)^T$  es asintóticamente estable. Mediante simulaciones numéricas en matplotlib.pyplot se comprobó para este punto considerando las condiciones  $0 < r \leq 1$  y  $K > 4m$ , la estabilidad de la población en el tiempo en ambos parches ecológicos.

El modelo propuesto de 2 parches ecológicos se podría extender a un modelo de 3 parches ecológicos incorporando una expresión matemática que represente a un depredador. O bien que este nuevo parche ecológico incorpore una nueva función de migración, que actúe como una reserva de la especie Huemul para el parche 2 con una tasa de reproducción  $r_2$  distinta a  $r$ .

La limitación que presenta este modelo dice relación principalmente con plantear una función de migración mas compleja desde el punto de vista de la cantidad de parámetros, una función de migración de estas características dificultaría determinar los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales.

La relevancia de esta investigación radica en la ausencia de modelos que aborden de manera integral el comportamiento de la especie Huemul frente al efecto Allee y su interacción con una función de migración. Este vacío en la literatura resalta la necesidad de llenar un espacio crucial en la comprensión de cómo estos factores influyen en el comportamiento migratorio de los huemules, subrayando la importancia de este estudio.

# Bibliografía

- [1] Evodio Muñoz Aguirre, Sandy Gómez Pérez, and Jorge Álvarez Mena. Efecto allee: descripción y modelos básicos en la dinámica de poblaciones. *Matemáticas y sus aplicaciones* 8, page 41, 2017.
- [2] Warder Clyde Allee. Co-operation among animals. *American Journal of Sociology*, 37(3):386–398, 1931.
- [3] Luděk Berec, Elena Angulo, and Franck Courchamp. Multiple allee effects and population management. *Trends in Ecology & Evolution*, 22(4):185–191, 2007.
- [4] Paul Blanchard and Robert L Devaney. *Ecuaciones diferenciales*. Number 517.38 B5. 1999.
- [5] William E Boyce and Richard C DiPrima. *Ecuaciones diferenciales*. Limusa Wiley, 2010.
- [6] Fred Brauer and Carlos Castillo-Chavez. *Mathematical models in population biology and epidemiology*, volume 2. Springer, 2012.
- [7] Franck Courchamp, Ludek Berec, and Joanna Gascoigne. *Allee effects in ecology and conservation*. OUP Oxford, 2008.
- [8] Brian Dennis. Allee effects: population growth, critical density, and the chance of extinction. *Natural Resource Modeling*, 3(4):481–538, 1989.
- [9] Felipe Domínguez Lozano. *¿ Qué sabes sobre biodiversidad?: Preguntas y respuestas en torno a la Biología de la Conservación*. Ediciones Mundi-Prensa, 2019.
- [10] Ernesto Enkerlin, Gerónimo Cano, Raúl Garza, and Enrique Vogel. Ciencia ambiental y desarrollo sostenible. *México: International Thomson Editores*, page 393, 1997.
- [11] Gladys Garay, Oscar Guineo, and Isaac M. Ortega. Tagging huemul fawns (hippocamelus bisulcus) at torres del paine national park, magallanes, chile. *Anales del Instituto de la Patagonia*, 44(3):13–19, dic. 2016.

- [12] Eduardo González-Olivares, Jaime Mena-Lorca, Alejandro Rojas-Palma, and José D. Flores. Dynamical complexities in the leslie–gower predator–prey model as consequences of the allee effect on prey. *Applied Mathematical Modelling*, 35(1):366–381, 2011.
- [13] Jack K Hale. *Ordinary differential equations*. Courier Corporation, 2009.
- [14] I. Hanski. *Metapopulation Ecology*. Metapopulation Ecology. OUP Oxford, 1999.
- [15] Álvaro Madrigal. Migración y emigración de especies. *Revista de Ciencias Ambientales*, 28(1):3–12, 2004.
- [16] R Maier. Comportamiento animal. un enfoque evolutivo y ecológico. editorial mc graw-hill, 2001.
- [17] Fernando R Momo and Angel F Capurro. Ecología matemática: principios y aplicaciones. *Ediciones Cooperativas. Buenos Aires*, pages 17–36, 2006.
- [18] Lizeth Paola Martínez Ochoa, Helbert Espitia Cuchango, Efrain Enrique Jácome Lobo, et al. Revisión de modelos migratorios. *Revista vínculos*, 14(2):149–160, 2017.
- [19] Gustavo A Ossandón and Ricardo Castro Santis. Population dynamics with density-dependent immigrations and allee effect. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 52(2):211–218, 2018.
- [20] Victor Raimilla. Huemul del sur (*Hippocamelus bisulcus*): Estado del conocimiento en la patagonia. Technical report, Parque La Tapera, 2020.
- [21] Diego J Rodríguez. Modelos de metapoblaciones y de la dinámica espacio-temporal de comunidades. *Interciencia*, 31(7):547–548, 2006.
- [22] A Serret. El huemul: Fantasma de la patagonia. zagier & urrutu publicaciones. *Buenos Aires, Argentina*, 2001.
- [23] Philip A Stephens, William J Sutherland, and Robert P Freckleton. What is the Allee effect? *Oikos*, pages 185–190, 1999.
- [24] Alejandro R Vila, Rodrigo López, Hernán Pastore, Ricardo Faúndez, and Alejandro Serret. Current distribution and conservation of the huemul (*hippocamelus bisulcus*) in argentina and chile. *Mastozoología neotropical*, 13(2):263–269, 2006.